Syllabus

Un syllabus, dans le domaine de la pédagogie, est le résumé du cours d'un enseignant.
Mise à jour le 06 01 2021

Ce livre qui devrait être dans les mains de tous
les professeurs de physique
(collège et lycée)
…

de leurs élèves
(collège)
mais aussi
…

des étudiants
…

des médiateurs des sciences
…

et
de n'importe quel curieux des sciences
Parce qu'un retour aux sources historiques est la meilleure des révisions

Cinématique, dynamique, énergétique

Introduction

Les relations entre sciences et société ont profondément évolué depuis mon temps de jeunesse.
Elles sont passées du culte du progrès au culte du doute.
Il y a eu ce XXe siècle de violences et de folie collective, deux guerres mondiales, des guerres civiles affreuses, motivées par la concurrence entre des idéologies qui chacune prétendait à l'universalité.
Il y a eu l'effondrement du marché du travail exigeant des compétences scientifiques parce que des humains ont inventé des machines à tout faire de plus en plus autonomes : des ordinateurs, des logiciels, et des applications. On parle même d'intelligence artificielle.
L'argument du temps de mon enfance disant que bien apprendre à l'école pour se ménager assurera plus tard une belle place dans la société a perdu toute sa pertinence.
***Il reste qu'apprendre a toujours été et sera toujours un plaisir**. Ce plaisir qui était au Moyen Âge le privilège insigne d'une toute petite minorité peut devenir le plus populaire des loisirs.*
Ce livre veut montrer comment susciter et satisfaire l'insatiable curiosité des enfants dans un domaine du savoir pourtant réputé ennuyeux et difficile : les mouvements des corps. De plus, cette curiosité reste très résiliente chez les adultes comme l'ont démontré nombre de réunions, conférences, spectacles et autres manifestations de médiation scientifique.
La cinématique a le double défaut d'exiger des mathématiques pour la comprendre et de proposer des expériences qui n'ont rien de spectaculaire. Elle est la discipline des sciences physiques la plus ennuyeuse en collège comme au lycée.
Et pourtant !
Le long de ma carrière d'enseignant, tous les élèves séduits par la physique l'ont été à partir de ce thème là ! Aucun n'a été séduit par un autre sujet plus attractif ou plus facile.
Le secret de cette séduction surprenante est le sentiment qu'il existe une analogie fondamentale entre les difficultés conceptuelles surmontées par les pionniers de la physique et celles rencontrées par les élèves. En conséquence, si chez quelqu'un la compréhension d'une argumentation se bloque, le mieux est de remonter aux sources : chercher, assimiler, synthétiser et exploiter le pourquoi et le comment de l'invention des grandes idées dans l'histoire des sciences.
À partir de là, plus rien ne peut résister à la perspicacité des élèves, donc des adultes.
L'expérience professionnelle a démontré que la séduction d'un esprit non scientifique par la physique est un événement aussi bref que spectaculaire, et mon interprétation est que la personne à qui cela arrive a franchi un seuil culturel fondamental. Avant cet éclair on n'a pas confiance en soi, après on l'a, et cette acquisition est définitive.
Dans ses premières pages ce livre vous aide à identifier ce verrou, ce seuil pour vous donner le pouvoir de le faire sauter.
Les pages suivantes montrent aux maîtres et à leurs élèves, mais aussi à tout adulte dont la curiosité culturelle scientifique est en sommeil, des pistes de progression dans les savoirs sur le monde tant mathématiques que physiques. Elles montrent en même temps que vous, lecteur, lectrice, n'êtes pas prêt ou prête à connaître les limites de votre capacité à comprendre.

*Durant toute ma carrière, le poison a été l'évaluation des élèves. **Parce que personne n'a pu me dire ce qu'il faut évaluer**. Une réflexion simple pourtant peut nous le révéler : dans toute une une scolarité, seul un échantillon limité de problèmes peut être présenté alors que dans la vie active on sera confronté à une infinité de ces situations dans des domaines jamais vus des savoirs.*
C'est exactement ce qu'ont découvert les spécialistes de l'apprentissage du langage pendant la petite enfance. Avant de parler, à partir d'un ensemble – riche certes – mais limité de phrases entendues, les enfants prennent conscience de la grammaire et de la syntaxe et enrichissent leur vocabulaire. Cette activité perdure même si les enfants jouent sans y prêter attention. Puis soudain, ils parlent avec très peu d'erreurs, montrant qu'ils sont capables de juger correctement la construction des phrases jamais entendues, même s'ils n'en comprennent pas encore le sens.
Tout se passe comme si chacun de ces énoncés scolaires induisent progressivement dans nos cerveaux la formation d'un amas de connexions neuronales couvrant un domaine particulier des savoirs, et qu'ensuite, la densité de ces amas augmentant progressivement, et par relations les uns avec les autres, ils permettent soudain des chaînes associations d'idées illimitées. Brusquement on devient capables d'étudier toute espèce de situations jamais encore abordées.
L'évaluation des élèves ne devrait servir qu'à savoir si ce seuil est franchi.

Table des paragraphes

Page		Paragraphe
1		Titre
2		Introduction
3		Table des matières
5		Remerciements
7	§01	Lois non linéaires
9		1 Cinématique
11	§02	L'espace et le temps
13	§03	L'usage des aires en cinématique
15	§04	Vitesses moyenne et instantanée
17	§05	Notion de calcul différentiel
19	§06	Quelques exemples bien utiles
21	§07	Dérivées des fonctions trigonométriques
22	§08	Vitesse des mouvements circulaires
23	§09	Accélération des mouvements circulaires
25		Exemples d'usage des moments
27	§10	Les unités en cinématique
29	§11	Usage des exposants pour exprimer les unités
31	§12	Traçage par le corps en mouvement de la vitesse et de l'accélération
33		2 Dynamique
35	§13	Initier à la dynamique
37	§14	Traçage par le corps en mouvement de la force
39	§15	Forces et vecteurs
41	§16	Moment de force
43	§17	Calculs de moments d'inertie
45	§18	Forces simultanées
47	§19	Forces réciproques et centre de masse
49	§20	Leviers et moments de force
51	§21	Usages théoriques des moments
53	§22	Problèmes de force
55	§23	Poussée d'Archimède et poulies
57	§24	Notion de champ
59	§25	3 Énergie
61	§26	Un théorème de Newton sans intérêt physique apparent
63	§27	Le travail
65	§28	Exemple de travaux
67	§29	Notion d'énergie et de puissance
69	§30	? Énergie et moments
71	§31	Classement des énergies en physique
73		4 Relativité restreinte
75	§32	Le problème de la vitesse de la lumière
77	§33	Relativité restreinte
79	§34	Énergie cinétique relativiste
81		5 Électricité
83	§35	L'électricité, la chimie et le magnétisme
85	§36	Électricité, travail et chaleur
87	§37	Énergie et unités électriques
89	§38	Le voltmètre de Thomson

Page		Paragraphe
91		6 Mathématiques
93	§39	La notion de fonction mathématique
95	§40	Tableaux de proportion
97	§41	Tableaux de proportion étendus
99	§42	Fonction continue et additive
101	§43	L'usage des aires en géométrie plane
103	§44	Une invention mathématique importante : les vecteurs
105	§45	Trigonométrie
107	§46	Théorème du cosinus et produit scalaire
109	§47	Produit scalaire en coordonnées
111	§48	Théorème du sinus
113	§49	Aire du triangle en coordonnées en deux dimensions
115		7 Au-delà du collège
117	§50	Parallaxe en astronomie
119	§51	Détection d'une exoplanète
121	§52	Aire du triangle en coordonnées en trois dimensions
123	§53	Volume d'un parallélépipède à partir de coordonnées
125	§54	Fonction additive continue de plusieurs variables

Remerciements

Sans l'aide précieuse de la part de l'équipe de rédaction du Bulletin de l'Union des Physiciens, le BUP de l'Union des Professeurs de Physique et Chimie, qui gracieusement ont assuré la relecture, erreurs, boules et boulettes auraient constellé l'ouvrage.

Un grand merci aussi à mon collègue et ami André Callas de par la pertinence de ses critiques et sa fécondité en matière de bricolages pédagogiques.

Mes remerciements ne seraient pas complets sans mentionner les élèves en difficulté qui avaient osé revendiquer de ma part une aide que j'ai eu le bonheur d'accorder. Environ une fois par année scolaire, une demande de compréhension m'a ouvert une nouvelle piste pédagogique féconde sur un nouveau sujet scientifique, en physique, en chimie ou en mathématiques.

Quelques illustrations ont été extraites de la Toile. Chaque fois que j'ai pu, la référence a été citée. Mais l'accès aux pages et leur référencement est, c'est bien connu, quelque peu instable, et c'est pourquoi certaines d'entre elles manquent faute d'avoir pensé à les télécharger à temps. À leurs auteurs je présente mes excuses.

Avertissement pédagogique

Dans cet ouvrage, il est fait un large usage des tableaux de proportion. Un échange avec un des relecteurs de l'ouvrage m'a rappelé une précaution importante dans cet usage : faire en sorte que dans l'esprit des gens une relation entre deux grandeurs physiques n'est pas toujours proportionnelle. C'est pourquoi ont été ajoutées deux chapitres : un sur l'étalonnage d'un dynamomètre avec un élastique à la place du ressort habituel et un autre sur la recherche de la troisième loi de Kepler.

§01 Lois non linéaires

1. Il est fait dans cet ouvrage de nombreuses applications des tableaux de proportion.
2. Quand deux grandeurs sont proportionnelles, on dit que la loi physique qui les relie est linéaire.
3. Le risque induit par un usage très fréquent de représentation d'une loi physique par une proportion a été signalé à la relecture. En effet, les élèves n'ayant pas assez acquis un esprit lucide et critique vont par réflexe considérer n'importe quel tableau comme un tableau de proportion et il faut les protéger contre cette erreur. C'est la raison de ce paragraphe.

EXPÉRIENCE NON LINÉAIRE EN LYCÉE

4. *Principe* : Suspendre un récipient à une potence avec un fil en caoutchouc et remplir progressivement le récipient d'eau jusqu'à ce que le fil se rompe.
   Voici dans le tableau 01a des résultats publiés sur la Toile, page http://caoutchouc.e-monsite.com/pages/nos-experiences-de-tpe.html.
5. Le matériel utilisé est :
   - un élastique en caoutchouc naturel de dimension 120 mm × 2 mm × 1 mm,
   - un seau de 7 litres dont la masse vaut 0.258 kg quand il est vide,
   - une potence,
   - une règle graduée (le mètre traditionnel de nos classes)
   - deux mousquetons.
6. L'environnement de l'expérience est la cour du lycée, sous abri, à une température ambiante de 4°C, en absence de vent.
7. Les résultats sont dans le tableau 01b.
8. Manifestement les quotients $\frac{L - L_o}{m}$ ne sont pas égaux d'une ligne à l'autre.

UN CAS ASTRONOMIQUE HISTORIQUE

9. Un autre exemple a été la recherche d'une loi éventuelle entre la période d'une planète autour du Soleil et la distance qui la sépare de lui. L'astronome Johan Kepler, au XVIIe siècle, était aussi musicien et cherchait une telle loi en s'inspirant d'une idée simple.
   On raconte que dans l'antiquité, Pythagore avait étudié la qualité de perception d'un son selon la longueur et la tension de la partie vibrante d'une corde d'un instrument de musique (figure 01a). En musique, il était bien connu que quand on émet simultanément plusieurs sons de monocorde, la perception n'est agréable que si ces longueurs étaient en rapports simples, par exemple deux sons émis par deux cordes dont les longueurs sont comme les nombres 2 et 3 (le rapport de quinte). Alors ces rapports harmoniques se retrouveraient-ils dans d'autres domaines des savoirs ? En particulier en astronomie ?
10. A partir de ses propres tables numériques et de celles de son maître Tycho Brahe, ont été extraits les valeurs du tableau 01b exprimées en unités modernes. L'astronome s'attendait donc à la non proportionnalité entre distance et période (tableau 01b : les valeurs sont exprimées en unités modernes). Les chiffres sont éloquents.
11. La quinte musicale qui inspira Kepler donna le tableau 01c : on constate une bien meilleure approximation de la proportionnalité.
12. Il reste cependant une question : dans le tableau 01c, les quotients T^2 / L^3 ne sont pas exactement égaux. C'est pour les élèves une belle occasion d'initiation à la recherche sur Internet : quelles explications ont été proposées ? Les incertitudes des mesures ? La forme des orbites qui ne sont pas exactement circulaires (2e loi de Kepler) ? Une autre théorie ?

Masse suspendue m en kg	Longueur L en mm	Allongement $L - L_o$ en mm	L/m en mm/kg
0	130	0	X
0,5	650	520	1040
1	730	600	600
1,5	790	660	440
2	840	710	355
2,5	880	750	300
3	Rupture	–	

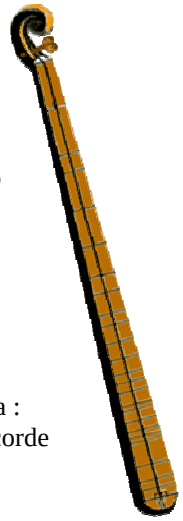
Tableau 01a : étalonnage d'un élastique en caoutchouc

Planète	Période T (jours terrestres)	Distance L (millions de km)	L / T
Mercure	88	58	0,659 090 91
Vénus	225	108	0,480 000 00
Terre	365	150	0,410 958 90
Mars	687	228	0,331 877 73
Jupiter	4 333	779	0,179 783 06
Saturne	10 759	1 434	0,133 283 76
Uranus	30 685	2 871	0,093 563 63
Neptune	60 266	4 495	0,074 586 00

Tableau 01b
Mesures astronomiques

Planète	T^2	Distance L^3	L^3/T^2
Mercure	7 744	195 112	25,195 247 93
Vénus	50 625	1 259 712	24,883 200 00
Terre	133 225	3 375 000	25,333 083 13
Mars	471 969	11 852 352	25,112 564 6
Jupiter	18 774 889	472 729 139	25,178 798 07
Saturne	115 756 081	2 948 814 504	25,474 380 94
Uranus	941 569 225	23 664 622 311	25,133 173 09
Neptune	3 631 990 756	90 821 587 375	25,006 007 30

Tableau 01c
Calculs astronomiques



Crédit :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Monocorde#/media/Fichier:Monocordio20060327.png

Fig. 01a :
Un monocorde

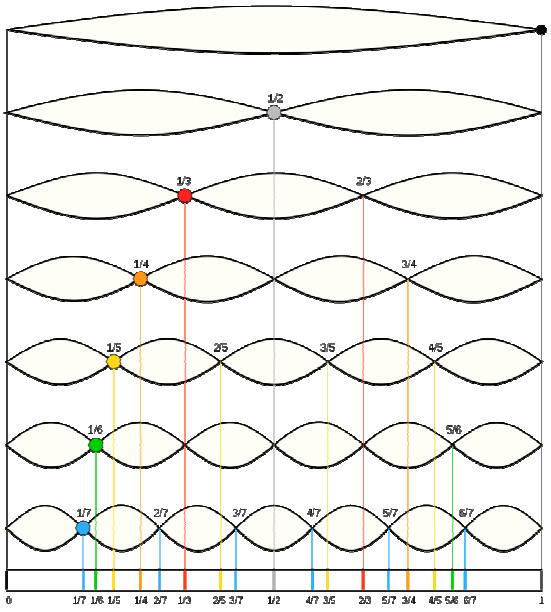


Fig. 01b :
Sons et longueurs vibrantes de corde
Crédit :
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2f/Moodswingerscale.svg/800px-Moodswingerscale.svg.png

1 Cinématique

§02 L'espace et le temps

Coordonnées cartésiennes d'un point

1. **Étymologie** : le mot *coordonnée* vient de *co* = avec, *ordonné* et *cartésien* du scientifique et philosophe *Descartes*.
2. **Origine de l'idée** : dans les épures en architecture (fig. 02a), on compare la position des points dans l'espace avec un décor choisi comme référence qu'on appelle **repère** (en rouge).
3. La formule 02a montre un code d'écriture signifiant que dans le repère OIJK l'**abscisse** de M est x l'**ordonnée** est y et la **cote** est z.
4. **Avantage pratique** : on suit trois mouvements rectilignes simultanés au lieu d'un mouvement curviligne, unique certes, mais souvent difficile à modéliser (ligne courbe de la fig. 02a).

Coordonnées cartésiennes d'un déplacement

5. On appelle en physique **référentiel** un ensemble composé d'un repère de l'espace dont les axes en général sont deux à deux perpendiculaires et de même unité de longueur (repère orthonormé) et d'une horloge.
6. Soient (fig. 02b) deux positions successives d'un point matérialisé sur un objet en mouvement M (en noir) et P (en rouge). On retrouve (en noir) une partie de la figure 02a, le décor de référence et en tirets les tracés donnant les trois coordonnées de la position initiale M. Imaginons un nouveau repère (en rouge) parallèle au premier et dont l'origine est en M. Le tableau (02b) montre en rouge les coordonnées de la nouvelle position P dans le repère rouge. On voit que dans le repère noir le déplacement fait passer les valeurs des coordonnées du point matérialisé x, y et z aux valeurs $x + X$, $y + Y$ et $z + Z$.
7. Par définition les grandeurs X, Y et Z sont les **coordonnées du déplacement** du point matérialisé.
8. La formule (02b) montre un code d'écriture signifiant que dans le repère OIJK l'abscisse du déplacement de M à P est X, l'ordonnée est Y et la cote est Z.
9. La figure 02c est un extrait de la fig. 02b. Elle montre une application du théorème de Pythagore (démontré page 45) $MP^2 = MR^2 + RP^2$ qui, avec $MR^2 = MQ^2 + QR^2$ donne par substitution $MP^2 = MQ^2 + QR^2 + RP^2$ soit $MP^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. **Le carré de la distance parcourue lors d'un déplacement est égale à la somme des carrés de ses coordonnées**.
10. Suivre le mouvement d'un corps est en général compliqué si en même temps ce corps se déforme ou change d'orientation. Aussi les géomètres commencèrent par modéliser les mouvements les plus simples : les **translations**.
11. Une translation est telle que tous les points pouvant être matérialisés du corps suivent des déplacements parallèles, de même sens et sur la même distance (figure 02d). Cette démarche fut l'initiatrice d'un concept géométrique nouveau : le **vecteur** (§38).
12. En technologie, beaucoup de mouvements sont contraints à rester dans un plan. Dans ces cas, dans les expressions mathématiques précédentes, on supprime le terme en cotes. En particulier, la formule de la distance devient $MP^2 = X^2 + Y^2$.

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{OIJK}$$ (Formule 02a)

Point	O	I	J	K	A	B	C	D	E	F	M
Abscisse	0	1	0	0	*x*	0	0	*x*	0	*x*	*x*
Ordonnée	0	0	1	0	0	*y*	0	*y*	*y*	0	*y*
Cote	0	0	0	1	0	0	*z*	0	*z*	*z*	*z*

Tableau 02a

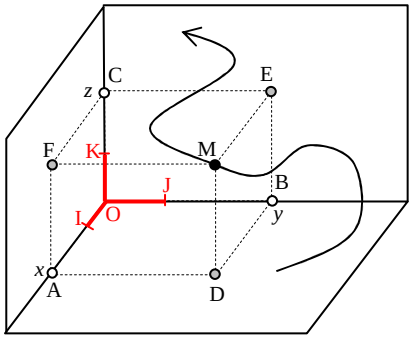


Fig 02a

$$M = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{OIJK}$$ (Formule 02b)

	Dans le repère rouge		Dans le repère noir	
Point	M	P	M	P
Abscisse	0	*X*	*x*	*x* + *X*
Ordonnée	0	*Y*	*y*	*y* + *Y*
Cote	0	*Z*	*z*	*z* + *Z*

Tableau 02b

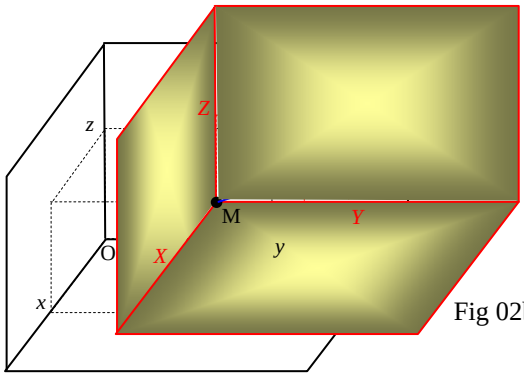


Fig 02b

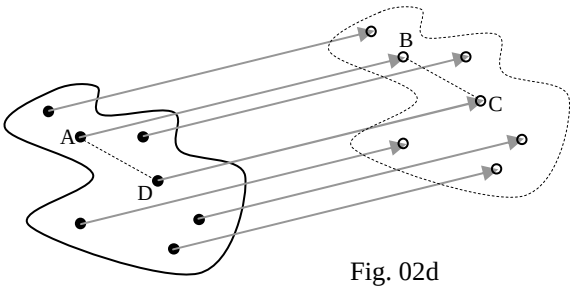


Fig. 02d

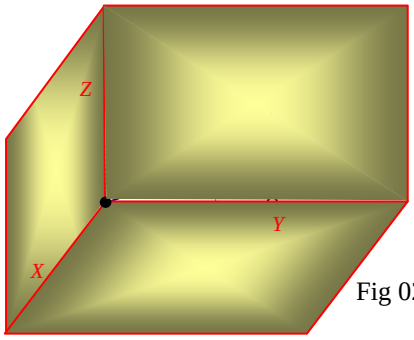


Fig 02c

§03 L'usage des aires en cinématique

1. Chez les Grecs de l'antiquité, on ne savait représenter en géométrie que les **mouvements uniformes** qui, *par définition*, sont tels que la distance parcourue et le temps de parcours soient proportionnels (tableau 03a), ce qui est représenté géométriquement par la figure 03a.
2. Au moyen âge, des intellectuels ont pensé que la formule $V\,t$ est (à un multiplicateur d'échelle près) l'aire d'un rectangle de longueur t et de hauteur V (fig. 03a, où le multiplicateur 1 est en mètres).
3. Pour éviter de traîner un facteur d'échelle dans nos démonstrations, il sufit de "graduer" la surface directement en $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\,\mathbf{s}$, c'est-à-dire en mètres.
4. Alors ces intellectuels ont *postulé* qu'il en est de même si la vitesse est variable (fig. 03b).
5. Comme *cas particulier* il y a les **mouvements** dits **uniformément accélérés** qui sont *par définition* tels que la variation de la vitesse soit proportionnelle au temps (tableau 03b).
6. On en déduit alors un théorème des mouvements uniformément accélérés (fig. 03c).
7. **Galilée** en déduisit la loi de position de ces mouvements $x - x_o = \frac{1}{2}\,a_x\,t^2$ (formule 3a).
8. Il s'en était ensuite servi comme modèle de la **chute libre** des corps.
9. La distance x devient la hauteur de chute z et l'accélération des chutes peut être chiffrée expérimentalement. Comme cette accélération est due à la **pesanteur** appelée aussi **gravité**, dans la formule 3a on remplace a_x par g d'où : $\boxed{z = \frac{1}{2}\,g\,t^2}$ (Formule 3b).
10. Si on choisit la hauteur de chute (par exemple la hauteur d'une tour ou d'un clocher) et si on mesure le temps de chute, alors sur les deux membres de la formule (3b) la division par t^2 et la multiplication par 2 donne $\frac{2\,z}{t^2} = g$.
11. Par exemple une hauteur de chute de 44,15 **m** pendant 3 **s** donne $g = \frac{2 \cdot 44{,}15\ \mathbf{m}}{(3\ \mathbf{s})^2} = 9{,}81\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$.
12. Cette formule nous dit que chaque seconde la vitesse de chute augmente de 9,81 **m/s**.
13. Dans l'histoire des sciences, **c'est la plus ancienne mesure connue d'une accélération**.
14. Note : **On peut faire la démonstration précédente à partir d'une vitesse initiale non nulle** : l'aire du triangle rectangle devient celle d'un trapèze rectangle (fig. 03d) et donne la formule balistique
15. $\boxed{x - x_o = 1/2\ a_X\,t^2 + V_{xo}\,t}$ (formule 3c).
16. Démonstration : d'une part la variation de vitesse est proportionnelle au temps :
$V_x - V_{xo} = a_x\,t$ (tableau 03c), et d'autre part l'aire de la figure 03e donne
$x - x_o = 1/2\ (V_x - V_{xo})\,t + V_{xo}\,t$ donc $x - x_o = 1/2\ a_x\,t^2 + V_{xo}\,t$ ■
17. Comme le temps de chute est très court, et comme les chronomètres n'étaient pas encore inventés, pour montrer au public les mouvements uniformément accélérés Galilée avait proposé de ralentir les chutes avec un *plan incliné*.
18. **Note sur l'usage des unités**. Les tableaux page ci-contre servent à écrire les formules littérales du mouvement uniforme dans un système d'unité donné. Or en général en physique et par prudence (pour éviter par exemple de confondre une masse m avec une longueur en mètres), ces formules ne sont jamais écrites avec les unités. Par contre dans les application numériques, il est recommandé de les écrire.
19. Exemple : soit un corps circulant à la vitesse de 10 $\mathbf{m\ s^{-1}}$ pendant 3 **s**. La distance est donnée d'après le tableau 03a par la formule littérale $x = V_x\,t$ qui numériquement devient $x = (10\ \mathbf{m\ s^{-1}}) \cdot (3\,\mathbf{s}) = (10 \times 3)\ (\mathbf{m\ s^{-1}\ m}) = 30\ \mathbf{m}$.

20.

Proportion	
Distance	Temps
x	t
V_X	1

Tableau 03a
Mouvement uniforme
$x = V_X\, t$
$V_X = x/t$
$t = x/V_X$

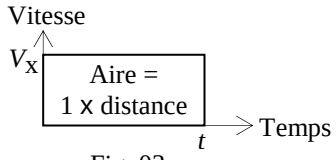


Fig. 03a :
Mouvement uniforme

Proportion	
Vitesse	Temps
V_X	t
a_X	1

Tableau 03b
Mouvement uniformément accéléré
$V_X = a_X\, t$
$a_X = V_X/t$
$t = V_X / a$

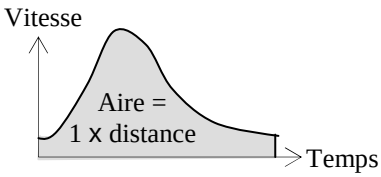


Fig. 03b :
généralisation aux mouvements à vitesse variable

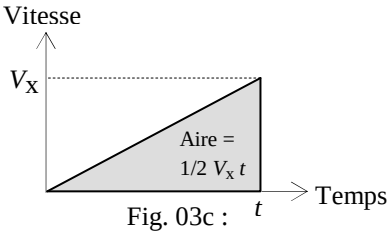


Fig. 03c :
Vitesse uniformément croissante. L'aire est en m^2 et $V_x\, t$ en mètres donc le 1/2 est en mètres.

$x = x_o = 1/2\, a_x\, t^2$
Formule 03a

Modélisation de la chute libre des corps

$z = 1/2\, g\, t^2$
Formule 03b

Proportion	
Vitesse	Temps
$V_x - V_{xo}$	t
a_x	1

Tableau 03c
Mouvement uniformément accéléré à vitesse initiale non nulle

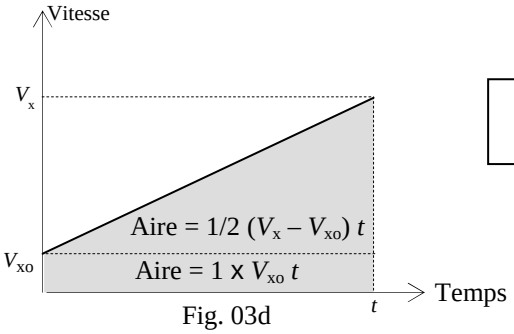


Fig. 03d
mouvement uniformément accéléré avec vitesse initiale non nulle

§04 Vitesse moyenne et instantanée

1. Dans ce paragraphe, est présentée l'idée apparue au moyen âge de représenter graphiquement la distance le long d'un axe parcourue lors d'un mouvement par l'aire sous une courbe représentant la loi de vitesse.
2. Pour les mouvements non uniformes, on définit la **vitesse moyenne** comme la vitesse d'un **mouvement uniforme imaginaire** qui dans un temps donné donne le même déplacement que la vitesse variable (tableau 04a).
3. Une telle valeur existe toujours (figure 04a). Si la ligne CB est superposée sur l'axe des abscisses, l'aire du rectangle OABC est nulle donc inférieure à l'aire de OADSE. Si la ligne CB passe par S, l'aire de OABC est plus grande que celle de OADSE. Il existe alors une position intermédiaire de CB telle que l'aire de OABC soit exactement égale à l'aire de OADSE.
4. Soit un mouvement représentée de cette manière (figure 04b).
5. On imagine bien qu'entre les instants τ (point B) et $\tau + h$ (point C) existe un instant t (point X) tel que les aires des deux surfaces HME et DIM deviennent égales, la première étant en défaut et l'autre en excès .
6. L'aire du rectangle BCIH est alors *exactement* égale à celle de BCDE, c'est-à-dire à la distance (cartouche de la fig. 04b).
7. Sa formule est alors $\boxed{x(\tau + h) - x(\tau) = V_{x\ moy} \cdot h}$ (le point désigne une multiplication). Souvent on divise les deux membres de cette formule par la durée h, ce qui donne la formule de la figure 04b. C'est le **théorème des accroissements finis**.
8. Considérons (cartouche de la figure 05b) l'encadrement : aire BCDF $\leqslant$ aire BCDE $\leqslant$ aire BCGE.
9. Exprimons ces aires avec les valeurs cinématiques
   aire BCDF = $V(\tau + h) \cdot h$, aire BCDE = $x(\tau + h) - f(\tau)$, aire BCGE = $V(\tau) \cdot h$.
10. L'encadrement donne la double inégalité $V(\tau + h) \cdot h \leqslant x(\tau + h) - x(\tau) \leqslant V(\tau) \cdot h$.
11. Une division des trois termes par h donne l'encadrement $V_x(\tau + h) \leqslant \dfrac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leqslant V_x(\tau)$, soit $V_x(\tau + h) \leqslant V_{x\ moy} \leqslant V_x(\tau)$.
12. Imaginons une valeur de h aussi petite qu'on veut, sans toutefois être nulle. Alors les valeurs $\tau + h$,t et τ se rapprochent au point de se confondre et on obtient le nouvel encadrement
13. $V_x(t) \leqslant \lim_{h \to 0} \dfrac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leqslant V_x(t)$ qui, par antisymétrie donne l'égalité $\boxed{\lim_{h \to 0} \dfrac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} = V_x(t)}$ soit encore $\boxed{\lim_{h \to 0} V_{x\ moy} = V_x(t)}$.
14. $\boxed{\text{La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne quand la durée tend vers zéro}}$.
    Cette formule permet de déduire l'expression de la vitesse instantanée connaissant celles des positions.
15. On peut refaire toute la démarche avec les aires, mais cette fois en mettant en ordonnée l'accélération et en abscisse la vitesse. On obtient alors simplement un changement de rôle des lettres (tableau 04b) et on arrive à la conclusion : $\boxed{V(\tau + h) - V(\tau) = a_{x\ moy} \cdot h}$, $\boxed{\lim_{h \to 0} \dfrac{V(\tau + h) - V(\tau)}{h} = a_x(t)}$ et $\boxed{\lim_{h \to 0} a_{x\ moy} = a_x(t)}$.

Application au mouvement uniformament accéléré

16. La formule $x - x_o = 1/2\ a_x\ t^2 + V_{xo}\ t$ donne la loi horaire $x(t) = 1/2\ a_x\ t^2 + V_{xo}\ t + x_o$.
17. Exprimer $x(\tau + h)$, donne trois termes :
    1er terme : $1/2\ a_x\ (\tau + h)^2 =$ (identité remarquable) $1/2\ a_x\ (\tau^2 + 2\ h\ \tau + h^2) =$ (distributivité) $1/2\ a_x\ \tau^2 + 1/2\ a_x\ (2\ h\ \tau + h^2)$ = (factorisation) $1/2\ a_x\ \tau^2 + 1/2\ a_x\ h\ (2\ \tau + h)$.
    2e et 3e termes : $V_{xo}\ (\tau + h) + x_o =$ (distributivité) $V_{xo}\ \tau + V_o\ h + x_o$.
18. Exprimer $x(\tau)$ donne $1/2\ a_x\ \tau^2 + V_{xo}\ \tau + x_o$.
19. Ensuite la soustraction de $x(\tau)$ élimine les termes en rouge et il reste $1/2\ a_x\ h\ (2\ \tau + h) + V_{xo}\ h$.
20. La division par h donne $\dfrac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} = 1/2\ a_x\ (2\ \tau + h) + V_{xo}$.
21. Imaginons une valeur de h aussi petite qu'on veut, sans toutefois être nulle : $\lim_{h \to 0} \dfrac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} = a_x\ t + V_{xo}$ donc la vitesse instantanée est donnée par la formule déjà établie (tableau 04c) : $V(t) = a_x\ t + V_{xo}$.

22. La formule $V - V_o = a_x\, t$ donne la loi de vitesse $V(t) = a_x\, t$.
23. Exprimer $V(\tau + h)$, donne $a_x\,(\tau + h)$ soit $a_x\,\tau + a_x\,h$.
24. Exprimer $x(\tau)$ donne $a_x\,\tau$.
25. Ensuite la soustraction de $x(\tau)$ élimine les termes en rouge et il reste $a_x\,h$.
26. La division par h donne $\dfrac{V_x(\tau + h) - V_x(\tau)}{h} = a_x$ qui ne dépend pas de h.

$\lim_{h \to 0} \dfrac{V_x(\tau + h) - V_x(\tau)}{h} = a_x$. On retrouve bien que la constante a_x est bien l'accélération du mouvement.

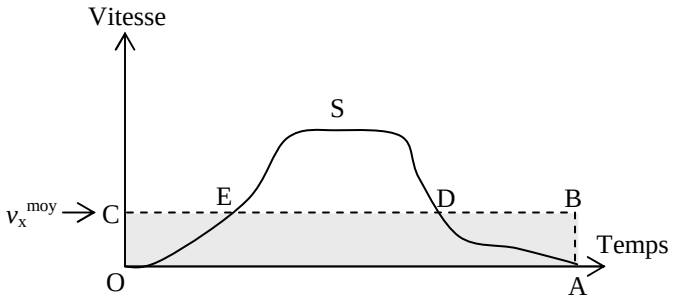


Fig. 04a vitesse moyenne

Proportion	
Temps	Espace
t	$x(t)$
1	$V_{x\ moy}$

Tableau 04a
Définition de la vitesse moyenne

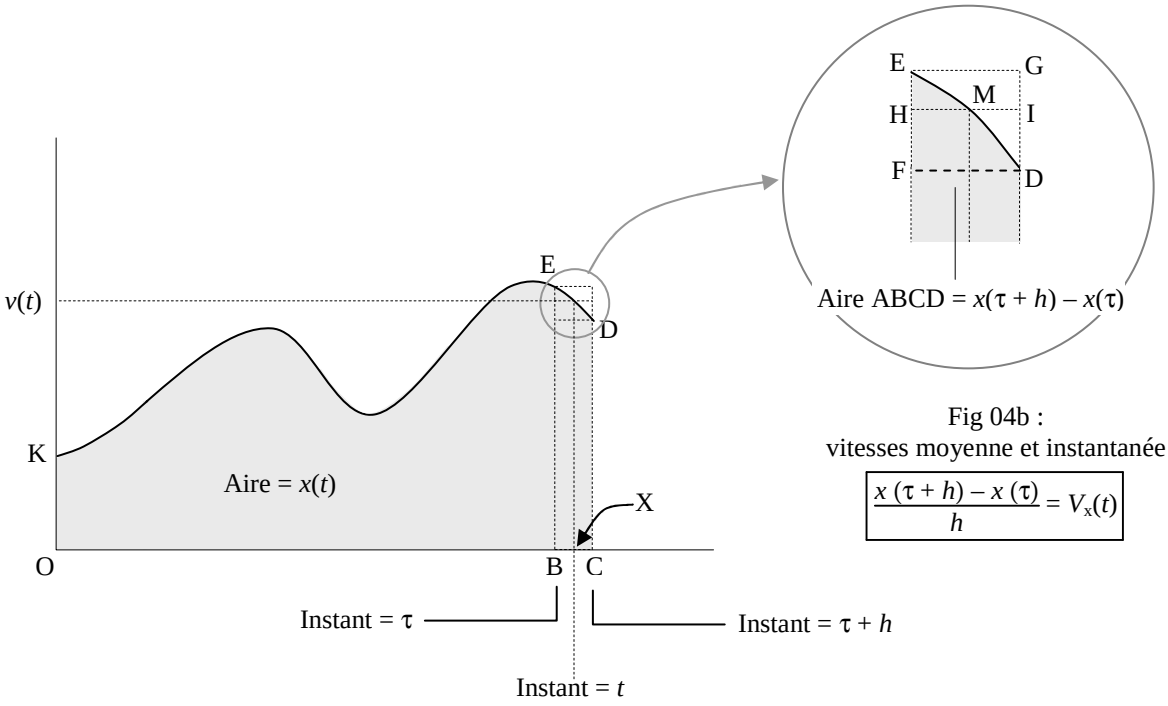


Fig 04b :
vitesses moyenne et instantanée

$$\frac{x\,(\tau + h) - x\,(\tau)}{h} = V_x(t)$$

Position	Vitesse
Vitesse	Accélération
x	V
V	a

Tableau 04b :
changement de rôle des grandeurs

§05 Calcul différentiel

1. On passe des mouvements mécaniques à l'abstraction mathématique en ne détaillant plus les grandeurs. La figure 05a et le tableau 05a montre les nouveaux rôles des lettres : le temps τ devient une variable x, la position x devient une fonction f et la vitesse devient une fonction f' dite **dérivée de** f. La vitesse moyenne V_x devient une "dérivée moyenne" (cette expression n'est pas standard) f'_{moy}.
2. Le **théorème des accroissements finis** dit qu'entre deux valeurs u et $u + h$ de la variable existe une valeur x telle que $\boxed{\frac{f(u+h)-f(u)}{h} = f'(x)}$.
3. On a démontré ensuite que $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h} = f'(x)}$.
4. On a ensuite appliqué à une fonction du deuxième degré (voir §04, alinéa 15) $f(x) = m\,x^2 + p\,x + q$ qui donne le résultat
   $f'(x) = 2\,m\,x + p$.
5. Leibnitz est parti de ces idées pour inventer une nouvelle écriture que tous les savants ont depuis adopté, tellement est est commode. Le h étant une différence entre deux valeurs de la variable x, pour le rappeler, il a accolé en préfixe le signe "d" donc h devient dx. De même la différence $f(u + h) - f(u)$ sera écrite df.
6. Les formules de l'al. 2 deviennent $\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)}$ et $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}$.
   Ces formules – surtout la première – ne sont pas qu'approximatives, mais exactes.
7. Leibnitz a aussi inventé une autre écriture (fig. 05b). On découpe un intervalle de la variable entre les bornes a et u en sous-intervalles dont la longueur – qu'elle soit constante ou pas – est écrite dx. Dans chacun des sous-intervalles il existe une valeur de x telle que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ donc telle que $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ (le point est un signe de multiplication).
8. On additionne ces équations membre à membre, ce qui s'écrit $\sum_{x=a}^{u} \mathrm{d}f = \sum f'(x) \cdot \mathrm{d}x$. Le signe $\sum$ signifie qu'on additionne. En-dessous est écrit le valeur de départ a de la variable. Au-dessus, c'est la valeur d'arrivée u.
9. À gauche on a la valeur exacte de l'aire de la surface grise $f(x) - f(a)$. Le **calcul** de l'aire est donc **intégral**.
10. À droite, on a une somme d'aires de lames rectangulaires semblables à ABIH.
11. Si, en pensée, dx tend vers zéro, les trois lames superposées ABCE, ABIH et ABFD vont devenir indistinctes et la somme à droite va avoir une infinité de termes, chacun étant proche de zéro. Cette situation étrange, mais mathématiquement exacte est arppelée par le choix d'un nouveau signe : un grand "S" allongé remplace $\sum$ et la formule de l'al. 8 devient $\int_a^u \mathrm{d}f = \int_a^u f'(x) \cdot \mathrm{d}x$.
12. Vu l'al. 9 on écrit aussi $\boxed{f(x) - f(a) = \int_a^u \mathrm{d}f}$ et $\boxed{f(x) - f(a) = \int_a^u f'(x) \cdot \mathrm{d}x}$.
13. Pendant les mêmes années, un autre savant avait exploré ce chapitre des mathématiques : Isaac Newton alors qu'il s'était réfugié à la campagne chez lui pendant la peste de 1666 à Londres. Sa publication eut lieu la même année que celle de Leibnitz et les deux savants se sont disputé l'invention le reste de leur vie.
14. Ce paragraphe vous présente brièvement la plus importante révolution des mathématiques.
15. Une remarque importante : les deux fonctions $f(x)$ = aire OBEK et la différence $f(x) - f(a)$ = aire ABEL ont la même dérivée $f'(x)$. Comme $f(a)$ dépend du choix de a mais pas de x le nombre $f(a)$ est qualifié de **constante**.
16. On conclut que **deux fonctions de même dérivée diffèrent l'une de l'autre d'une constante**.
17. Hypothèse : $f(x)$ et $g(x)$ diffèrent d'une constance K : $f(x) - g(x) = K$.
    $f(u + h) - g(u + h) = K$ et $f(u) - g(u) = K$.
    $[f(u + h) - g(u + h)] - [f(u) - g(u)] = 0$.
    $[f(u + h) - f(u)] - [g(u + h) - g(u)] = 0$.
    $\frac{f(u+h)-f(u)}{h} - \frac{g(u+h)-g(u)}{h} = 0$.
    $\lim_{h\to 0} \frac{f(u+h)-f(u)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h)-g(u)}{h} = 0$.
18. Conclusion : $f'(x) - g'(x) = 0$. **Deux fonction différant d'une constante ont même dérivée**.
19. Des formules de calcul de quelques dérivées sont démontrées dans le §49.

Changement de lettres	
Cinématique	Mathématiques
t	x
τ	u
h	h
x	f
V_x	$f'(x)$
Fonction du deuxième degré	
1/2 a	m
V_{xo}	p
x_o	$f(0)$

Tableau 05a
De la cinématique aux mathématiques

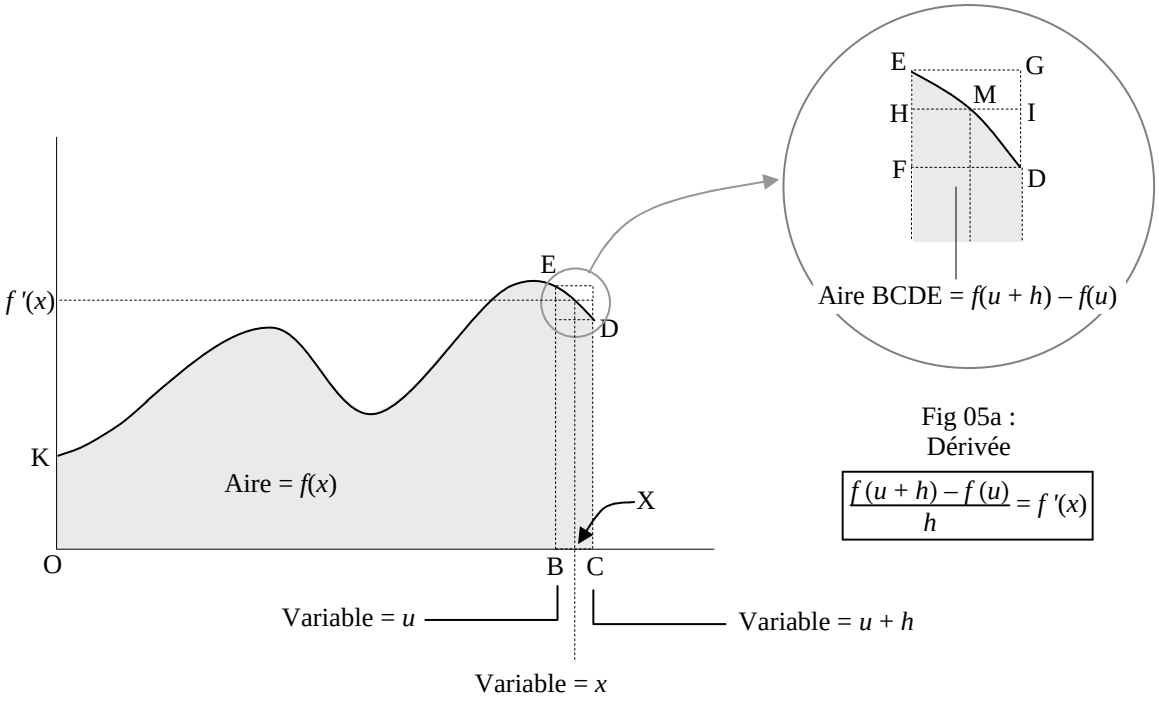


Fig 05a :
Dérivée

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h} = f'(x)$$

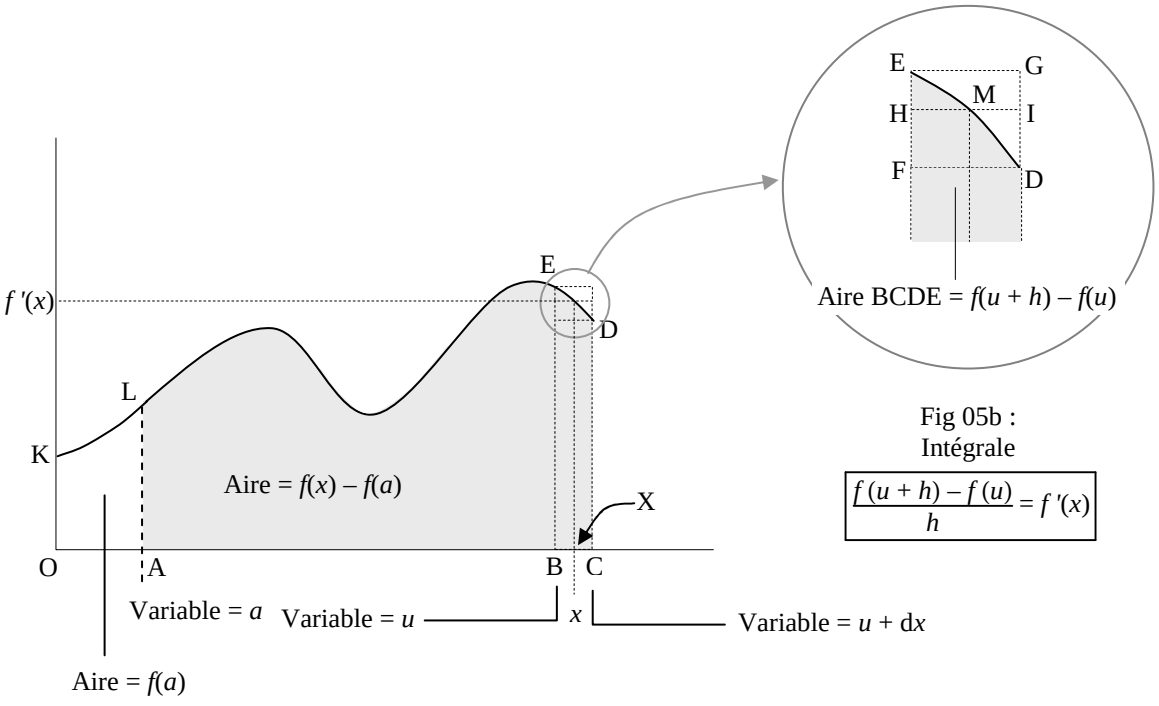


Fig 05b :
Intégrale

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h} = f'(x)$$

§06 Exemples de dérivées bien utiles

1. **Addition de fonctions**
Un artifice de calcul donne $[f(x + h) + g(x + h)] – [f(x) + g(x)] = f(x + h) – f(x) + g(x + h) – g(x)$.
La division par h donne $\frac{[f(x + h) + g(x + h)] – [f(x) + g(x)]}{h} = \frac{f(x + h) – f(x)}{h} + \frac{g(x + h) – g(x)}{h}$.
Le passage à la limite donne $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$. **La dérivée d'une addition est l'addition des dérivées.**

2. **Soustraction de fonctions**
Par une démonstration analogue à la précédente, on démontre que
La dérivée d'une soustraction est la soustraction des dérivées.

3. **Fonction multipliée par un nombre**
Le calcul donne (voir al.4) $\frac{a\,f(x + h) – a\,f(x)}{h} = a\,\frac{f(x + h) – f(x)}{h}$.
À la limite est $a\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. **Multiplier une fonction par un nombre multiplie sa dérivée par ce nombre.**

4. Démonstration : $\frac{a\,b}{c} = \frac{a\,b}{c\,1} = \frac{a}{c}\frac{b}{1} = \frac{a}{c}\,b$ et $\frac{a\,b}{c} = \frac{a\,b}{1\,c} = \frac{a}{1}\frac{b}{c} = a\,\frac{b}{c}$.

5. **Opposée d'une fonction**
L'opposée de $g(x)$ vue comme $(–1)\,g(x)$ est un cas particulier de l'al. 3 donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(– g) = (–1)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = –\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.
La dérivée d'une opposée est l'opposée de la dérivée.

6. **Somme de fonctions**
Par récurrence on démontre que **la dérivée d'une somme est la somme des dérivées**.

7. **Combinaison linéaire de fonctions**
La dérivée de la somme $a\,f(x)\ \ldots + m\,u(x)$ est (al. 6) la somme des dérivées $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,a\,f\ \ldots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,m\,u$ et l'al. 3 donne
$a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\ \ldots + m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u$. **La dérivée d'une combinaison linéaire est la même combinaison linéaire des dérivées.**

8. **Fonction constante** $f(x) = k$: $\frac{f(x + h) – f(x)}{h} = \frac{k – k}{h} = 0$ donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) – f(x)}{h} = 0$.
La dérivée d'une fonction constante est nulle.

9. **Multiplication de deux fonctions**
Un artifice de calcul donne
$f(x + h)\,g(x + h) – f(x)\,g(x) = f(x + h)\,g(x + h) – f(x)\,g(x + h) + f(x)\,g(x + h) – f(x)\,g(x)$.
Une factorisation donne $[f(x + h) – f(x)]\,g(x + h) + f(x)\,[g(x + h) – f(x)\,g(x)]$.
La division par h donne $f(x + h)\,g(x + h) – f(x)\,g(x) = \frac{[f(x + h) – f(x)]\,g(x + h)}{h} + \frac{f(x)\,[g(x + h) – f(x)\,g(x)]}{h}$.
L'al. 4 donne $\frac{f(x + h) – f(x)}{h}\,g(x + h) + f(x)\,\frac{g(x + h) – f(x)\,g(x)}{h}$.
Le passage à la limite donne $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) – f(x)}{h} \cdot g(x) + f(x) \cdot \lim_{h \to 0} f(x)\,\frac{g(x + h) – f(x)\,g(x)}{h}$.
Conclusion : on trouve $\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,g(x) + f(x)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}$. **La dérivée d'une multiplication n'est pas la multiplication des dérivées.**

La règle est celle-ci. **La dérivée d'une multiplication de deux fonctions est l'addition des multiplications de l'une par la dérivée de l'autre**.

10. **Application : vitesse d'un moment cinétique**
Par définition, c'est l'aire définie par une flèche position et une flèche représentant une autre grandeur (vitesse, accélération ou force). Cela donne une formule comme $x(t)\,v_y(t) – y(t)\,v_x(t)$ avec $v_{x\text{ ou }y} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\ (x \text{ ou } y)$. On trouve la différence entre d'une part $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \cdot v_y(t) + x(t) \cdot \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = v_x\,v_y + x(t)\,a_y(t)$ et d'autre part, par échange des lettes x et y son analogue $v_y\,v_x + y(t)\,a_x(t)$ et il reste $x(t)\,a_y(t) – y(t)\,a_x(t)$, c'est-à-dire le moment de l'accélération. **La vitesse du moment cinétique est le moment de l'accélération**.

Puissance de fonctions
On procède par récurrence.

Initiation. On sait que $u^1(x) = u(x)$ donc que $\frac{du^1}{dx} = \frac{du}{dx}$ et un artifice de calcul utilisant le fait que toute puissance nulle d'un nombre non nul vaut 1 donne $\frac{du^1}{dx} = 1\ u^0(x)\ \frac{du}{dx}$.

Hypothèse : si un entier n vaut 1, alors $n - 1 = 0$ et donc $\boxed{\frac{du^n}{dx} = n\ u^{n-1}(x)\ \frac{du}{dx}}$.

Supposons que cette formule soit démontrée pour une valeur particulière i de n. Alors $\frac{du^i}{dx} = i\ u^{i-1}(x)\ \frac{du}{dx}$.

Hérédité : pour la valeur $i + 1$ de n on a $i = n - 1$ et $u^n(x) = u^{i+1}(x) = u^i(x)\ u(x)$.
La dérivée de $u^n(x)$ est donc la dérivée de la multiplication $u^i(x)\ u(x)$ donc est la somme de $\frac{du^i}{dx}$ multipliée par $u(x)$ et de $u^i(x)$ multipliée par $\frac{du}{dx}$, donc la somme de $i\ u^{i-1}(x)\ \frac{du}{dx} \cdot u(x)$ et de $u^i(x) \cdot \frac{du}{dx} = u^{i-1}(x) \cdot u(x) \cdot \frac{du}{dx}$. On peut factoriser $u^{i-1}(x) \cdot u(x) \cdot \frac{du}{dx} = u^i(x) \cdot \frac{du}{dx}$, ce qui donne $(i + 1)\ u^i(x) \cdot \frac{du}{dx} = n\ u^{n-1}(x)\ \frac{du}{dx}$, c'est-à-dire la formule à démontrer.

La dérivée d'une puissance entière naturelle d'une fonction n'est pas la puissance des dérivées.

11. **Fonction monôme** définie par $f(x) = a\ x^n$. Vu l'al.10 et l'al.3 sa dérivée est $\boxed{\frac{d}{dx}(a\ x^n) = a\ n\ x^{n-1}}$.

12. **Fonction linéaire** qui est un cas particulier de monôme, définie par $f(x) = a\ x$ où a s'appelle le coefficient directeur et qu'on peut écrire $a\ x^1$. On a donc $\boxed{\frac{d}{dx}(a\ x) = a}$
Sa dérivée est $a\ x^{1-1} = a\ x^0 = a$: **la dérivée d'une fonction linéaire est son coefficient directeur.**

13. **Fonction affine** : elle est la somme d'une fonction linéaire et d'une constante donc la dérivée est le coefficient directeur de la fonction linéaire plus zéro. **la dérivée d'une fonction affine est son coefficient directeur.**
$\boxed{\frac{d}{dx}(a\ x + b) = a}$.

14. **Fonction carré**
Par application de l'al.10 $\boxed{\frac{d}{dx}(x^2) = 2\ x}$.

15. **Fonction trinôme du deuxième degré**
C'est la somme $a\ x^2 + (b\ x + c)$ = et l'al.11 donne $\boxed{\frac{d}{dx}(a\ x^2 + b\ x + c) = 2a\ x + b}$.

16. **Fonction de fonction**
Une fonction g est un ensemble de couples $(x\ ,\ g(x))$ et une autre f est un ensemble de couples $(g\ ,\ f(g))$. Alors on peut très bien imaginer la "fusion" des deux et dire que f est un ensemble de couples $(x\ ,\ f(g(x)))$. Un simple artifice de calcul donne $\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\ \frac{dg}{dx}}$. On écrit parfois $df\ (g(x))/dx = df/dg \cdot dg/dx$.

La dérivée d'une fonction de fonction est la multiplication des dérivées.

§07 Dérivées des fonctions trigonométriques

17. Soit sur le cercle trigonométrique un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l \\ \sin l \end{pmatrix}$.

18. Alors $x^2 + y^2$ est le rayon qui vaut une unité de longueur $x^2 + y^2 = 1$.

19. Soit l la longueur de l'arc de cercle entre le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et M.

20. On considère x et y comme deux fonction de l'arc $x(l)$ et $y(l)$ et alors $x^2(l) + y^2(l) = 1$.

21. Un petit déplacement de M sur le cercle de longueur dl occasionne une variation dx et dy des coordonnées.
Cela donne en dérivant (al.14) les deux membre $2\,x\,\frac{dx}{dl} + 2\,y\,\frac{dy}{dl} = 0$ donc
$x\,\frac{dx}{dl} + y\,\frac{dy}{dl} = 0$ donc $x\,\frac{dx}{dl} = -\,y\,\frac{dy}{dl}$.

22. Une élévation au carré donne $x^2\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 = y^2\left(\frac{dy}{dl}\right)^2$ et l'al. XX donne $(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dl}\right)^2$ donc $x^2\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2\right] = y^2\left(\frac{dy}{dl}\right)^2$.

23. L'arc dl et les variations des coordonnées dx et dy sont liées par le théorème de Pythagore $dl^2 = dx^2 + dy^2$ et la formule précédente donne $x^2\left[\frac{dx^2 + dy^2}{dl^2}\right] = y^2\left(\frac{dy}{dl}\right)^2$ soit $x^2 = \left(\frac{dy}{dl}\right)^2$ donc $x = \pm\,\frac{dy}{dl}$.

24. Un raisonnement analogue en échangeant les rôles des lettres x et y montre que $y = \pm\,\frac{dx}{dl}$.

25. Il faut identifier les signes. Soit un accroissement de l'arc dl positif. Sur le deuxième quadrant, x est négatif, y est positif, dx et dy sont négatifs. On retient donc $x = +\,\frac{dy}{dl}$ et $y = -\frac{dx}{dl}$.

26. Par identification des fonctions trigonométriques, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l \\ \sin l \end{pmatrix}$ donc $\boxed{+\,\frac{d}{dl}\sin l = \cos l}$ et $\boxed{\frac{d}{dl}.\cos l = -\sin l}$.

27. **La dérivée du sinus est le cosinus et la dérivée du cosinus est l'opposé du sinus.**
Note : on sait en trigonométrie que $\cos l = \sin(l + \pi/2)$ et $-\cos l = \cos(l + \pi/2)$ donc les deux formules précédentes deviennent $\frac{d}{dl}\sin l = \sin(l + \pi/2)$ et $\frac{d}{dl}\cos l = \cos(l + \pi/2)$.

28. Traditionnellement, l'arc l est écrit θ donc les résultats précédents s'écrivent $\boxed{\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \sin(\theta + \pi/2)}$ et
$\boxed{\frac{d}{d\theta}\cos\theta = \cos(\theta + \pi/2)}$. **Pour dériver une fonction sinus ou cosinus on ajoute à l'angle un angle droit.**

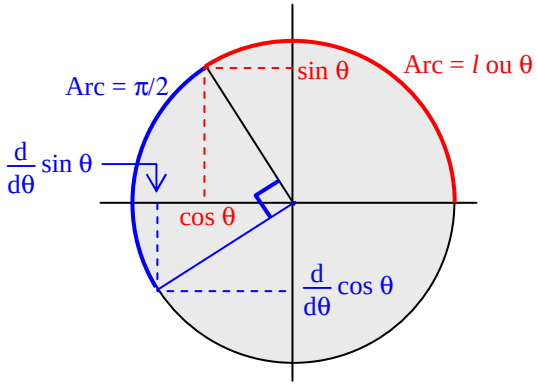


Fig. 07a Dérivées des fonctions trigonométriques

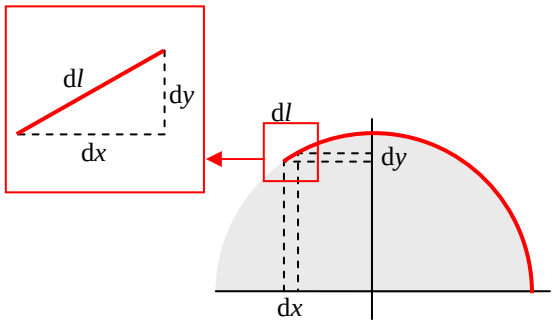


Fig 07b Longueur d'un petit arc

Vitesse des mouvements circulaires

29. **Fonction trigonométrique d'un angle dépendant d'une manière quelconque du temps**
Une fonction sinus ou cosinus d'une foncrion $\theta(t)$ en général ni linéaire ni affine intervient dans de très nombreux problèmes de physique. C'est important, vu l'immense quantité de pièces tournantes dans les machines, en astronomie les rotations des astres sur eux-mêmes et leur circulation sur des orbites souvent proches du circulaire. De plus ce sont des oscillations (mouvements en va-et-vient) qui génèrent les ondes sonores ou lumineuses. La connaissance

On applique donc la règle $\frac{d}{dt}\sin\theta = \frac{d}{dl}\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \sin(\theta + \pi/2) \cdot \frac{d\theta}{dt}$. Ici, $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse ω avec laquelle l'angle varie ou **vitesse angulaire**, donc on a $\boxed{\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \sin(\theta + \pi/2)\ \omega(t)}$ et $\boxed{\frac{d}{d\theta}\cos\theta = \cos(\theta + \pi/2)\ \omega(t)}$ par analogie.

30. **Mouvements oscillants et circulaires**
En physique, les mouvements oscillants sont des projections sur un axe de mouvements circulaires. Ceux-ci sont définis par la loi de position : $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\theta(t) \\ R\sin\theta(t) \end{pmatrix}$.

31. **La vitesse** est la dérivée par rapport au temps donc les flèches du vecteur **v** qui la représente sont de coordonnées $\begin{pmatrix} R\sin[\theta(t) + \pi/2]\ \omega(t) \\ R\cos[\theta(t) + \pi/2]\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\sin\alpha(t) \\ r(t)\cos\alpha(t) \end{pmatrix}$. Ici, $r(t)$ est la fonction $R\ \omega(t)$ et $\alpha(t)$ la fonction $\theta(t) + \pi/2$.
On peut dire que **le vecteur vitesse est sur le vecteur position multiplié par la vitesse angulaire et en avance d'un angle droit.**

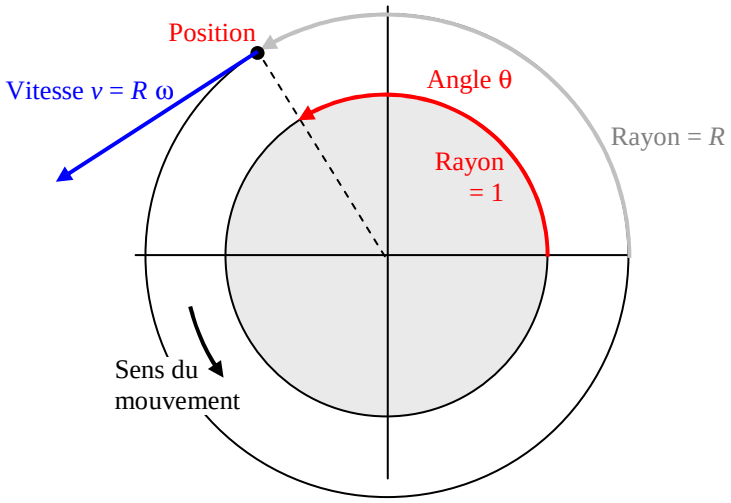


Fig. 07c Vitesse des mouvements circulaires

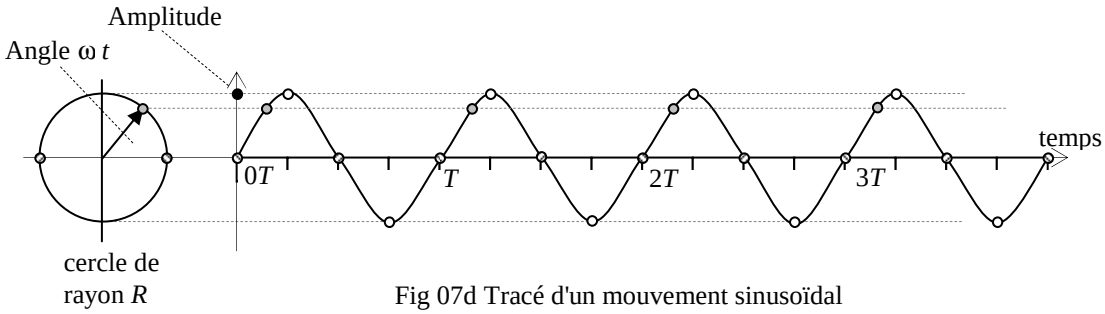


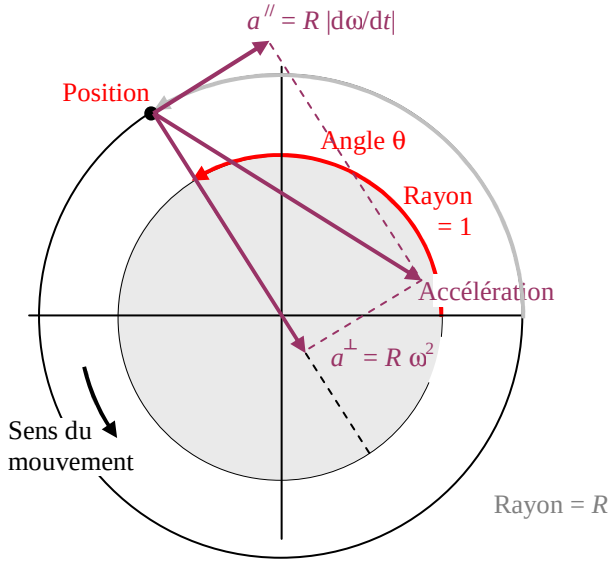
Fig 07d Tracé d'un mouvement sinusoïdal

§08 Accélération des mouvements circulaires

L'accélération est en abscisse $a_x(t)$, dont le calcul est plus compliqué.

32. Il faut dériver la multiplication de la fonction $r(t)$ par la fonction $s(t) = \sin \alpha(t)$ avec $\alpha(t) = \theta(t) + \pi/2$.
33. La dérivée d'une multiplication de deux fonctions est l'addition des multiplications de l'une par la dérivée de l'autre, donc on fait $a_x(t) = dr/dt \cdot s(t) + r(t) \cdot ds/dt$.
34. Ici, dr/dt est la dérivée de $R\ \omega(t)$ où R est le rayon de la trajectoire, donc est $R \cdot d\omega/dt$.
35. Puis $ds/dt = ds/d\alpha \cdot d\alpha/dt$ (dérivée d'une fonction de fonction)
$= \sin [\alpha(t) + \pi/2] \cdot \omega(t)$ (dérivée du sinus d'une fonction)
$= \sin [\theta(t) + \pi/2 + \pi/2] \cdot \omega(t)$ (substitution de $\alpha(t)$)
$= \sin [\theta(t) + \pi] \cdot \omega(t) = -\omega(t)\ d\omega/dt \cdot \sin \theta(t)$ (l'angle est augmenté d'un plat).
36. Le résultat est donc $a_x(t) = R\ d\omega/dt \cdot \sin [\theta(t) + \pi/2] - R\ \omega^2(t) \cdot \sin \theta(t)$.
37. Par analogie, en ordonnée on trouve $a_y(t)\ R \cos [\theta(t) + \pi/2] \cdot d\omega/dt - R\ \omega^2(t) \cdot \cos \theta(t)$.
38. On note que $R \cdot \sin \theta$ est l'abscisse x et que $R \sin [\theta(t) + \pi/2] = R \cos \theta$ est l'ordonnée y donc les résultats précédents sont $a_x(t) = -x(t)\ \omega^2(t) + y(t)\ d\omega/dt$ et $a_y(t) = -y(t)\ \omega^2(t) - x(t)\ d\omega/dt$.
39. On a une soustraction des coordonnées de deux flèches $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \cdot d\omega/dt \\ -x(t) \cdot d\omega/dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t)\ \omega^2(t) \\ y(t)\ \omega^2(t) \end{pmatrix}$.
40. La première flèche représente l'**accélération tangentielle** (tangente à la trajectoire) et la deuxième l'**accélération centripète** (dirigée vess le centre).
41. **La flèche accélération est décomposée en accélération centripète et accélération tangentielle**.
42. Le théorème de Pythagore donne le carré de la longueur des flèches. Ici cela donne $(y \cdot d\omega/dt)^2 + (y \cdot d\omega/dt)^2$ qui se développe puis se factorise $(x^2 + y^2)\ (d\omega/dt)^2 = R^2\ (d\omega/dt)^2 = (R \cdot d\omega/dt)^2$ pour l'accélération tangentielle et $(x\ \omega^2)^2 + (y\ \omega^2)^2$ qui se développe puis se factorise $(x^2 + y^2)\ \omega^4 = R^2\ \omega^4 = (R\ \omega^2)^2$ pour l'accélération centripète.
43. L'intensité de l'accélération tangentielle est $R \cdot |d\omega/dt|$, soit le rayon multiplié par l'accélération angulaire.
44. L'intensité de l'accélération centripète est $R\ \omega^2$, soit le rayon multiplié par le carré de la vitesse angulaire.

Fig. 08a Mouvement lent ralenti $\omega < 1$ **rd s^{-1}**



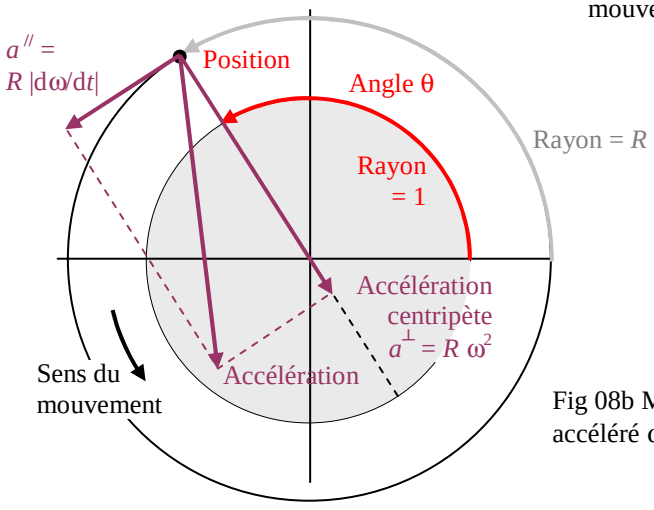


Fig 08b Mouvement lent accéléré $\omega < 1$ **rd s^{-1}**

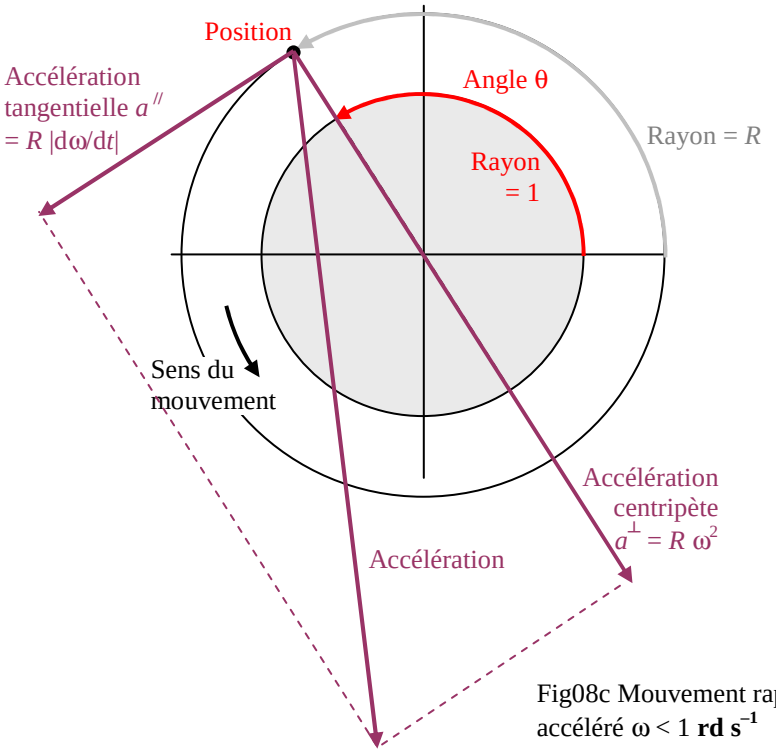


Fig08c Mouvement rapide accéléré $\omega < 1$ **rd s^{-1}**

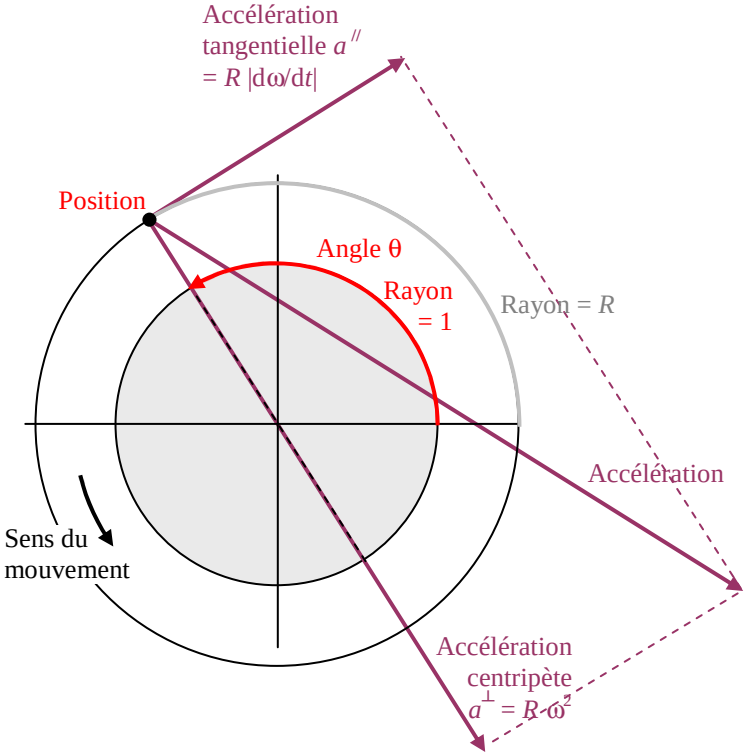


Fig.08d Mouvement rapide ralenti $\omega > 1$ **rd s^{-1}**

§09 Les unités en cinématique

Unités simples

1. Elles ont initialement été définies chacune à partir d'un étalon matériel. Voici les définitions de deux d'entre elles.
2. L'**unité d'espace est Le mètre** défini comme la 40 millionième partie d'un cercle méridien terrestre (figure 05a).
3. L'**unité de temps est la seconde** définie comme la 24 x 60 x 60 = 86400e partie du jour solaire moyen, celui-ci étant le temps séparant deux positions zénithales successives du Soleil (figure 05b).

Grandeur sans unité ou unité 1

4. En trigonométrie (figure 05c et tableau 05a), dans un triangle rectangle, un sinus, un cosinus ou une tangente est un quotient entre deux longueurs. Or la tradition (d'origine philosophique) était de ne jamais définir une nouvelle grandeur par une division. Pourtant, l'intérêt de la trigonométrie est que ses grandeurs sont invariantes quand on change d'unité de longueur pour mesurer les figures. Par exemple, avec un angle *a* limité par une hypoténuse de 3 **m** et un côté opposé de 1,2 **m**, nous écrivons $\sin a = \frac{1{,}2\ \mathbf{m}}{3\ \mathbf{m}} = 0{,}4$. Ce 0,4 n'est pas accompagné d'une unité.
5. En effet, toute conversion d'unité (tableau 05a, à condition que l'unité soit la même pour le dividende et le diviseur) donnera le quotient 0,4. Par exemple
6. $\sin a = \frac{1{,}2\ \mathbf{m}}{3\ \mathbf{m}} = \frac{12\ \mathbf{dm}}{30\ \mathbf{dm}} = \frac{1\ 200\ 000\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{m}}{3\ 000\ 000\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{m}} = \frac{0{,}0012\ \mathbf{km}}{0{,}003\ \mathbf{km}} = \text{etc.}$
7. Recopions ces formules uniquement avec les unités en mettant 1 comme valeurs numériques :
8. $\text{unité d'un sinus} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{dm}}{\mathbf{dm}} = \frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{m}}{\boldsymbol{\mu}\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{km}}{\mathbf{km}} = \ldots = \mathbf{1}$.
9. **Une division d'une unité par elle-même n'a donc pas de nom. On dit improprement que ces quotients … n'ont pas d'unité !**

Unités circulaires

10. Il s'agit des unités d'arc et d'angle. Leur définition résulte de traditions anciennes diverses.
11. Elles sont résumées dans le tableau de proportion 05c.

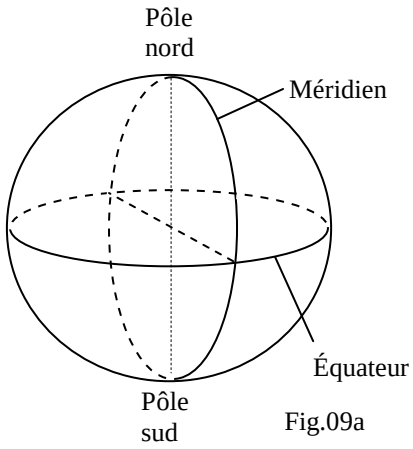


Fig.09a

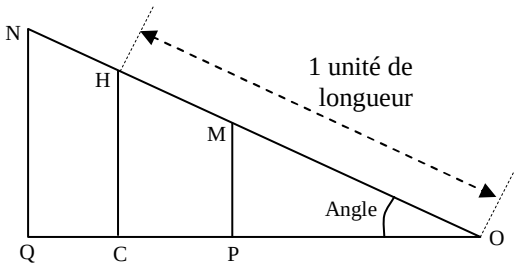


Fig. 09c : trigonométrie

	Proportion		
En biais	*OH* = 1	*ON*	*OM*
Horizontalement	*OC* = cosinus	*OQ*	*OP*
Verticalement	*CH* = sinus	*QN*	*PM*

Tableau 09a : trigonométrie

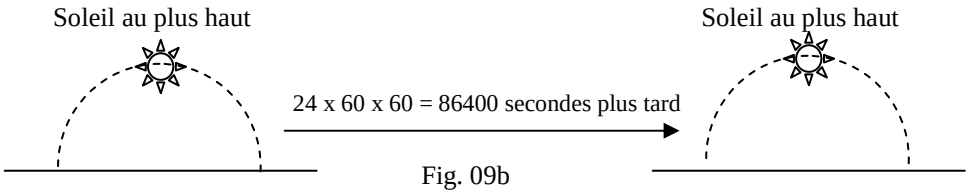


Fig. 09b

Unités	km	m	dm	µm
Définition des sous-multiples	0,001	1	10	1 000 000
Conversions	1	1000	10 000	1 000 000 000
Côté opposé	0,0012	1,2	12	1 200 000
Hypoténuse	0,003	3	30	3 000 000

Tableau de proportion 09b (en noir : les énoncés)

Proportion		
Nom	cercle complet	Arc de cercle
Tour	1	
Demi-tour	2	
Quart de tour	4	
N-ième de tour	*N*	
Minute horaire	24 x 60	
Seconde horaire	24 x 3600	
Degré	360	
Minute d'arc	360 x 60	
Seconde d'arc	360 x 3600	
Radian	2π	
Longueur	$2\pi R$	
Aire de secteur	πR^2	

Tableau 09c
(divisions du cercle)

§10 Usage des exposants pour exprimer les unités

Unités simples

1. **La règle générale est de faire avec les unités les mêmes opérations multiplication et division qu'avec les nombres**. Par exemple
l'unité standard des aires est le mètre carré : $1\ \mathbf{m}^2 = 1\ \mathbf{m} \cdot 1\ \mathbf{m}$,
l'unité standard des volumes est le mètre cube $1\ \mathbf{m}^3 = 1\ \mathbf{m} \cdot 1\ \mathbf{m} \cdot 1\ \mathbf{m}$.

2. En général, la définition des puissances successives de la même unité se définit comme chez les nombres (tableau 06a) : si p est au moins égal à 2 $\boxed{\mathbf{m}^p\ \mathbf{m} = \mathbf{m}^{p+1}}$.

3. La même démarche (tableau 06b) démontre pour p et q au moins égaux à 2 $\boxed{\mathbf{m}^p \cdot \mathbf{m}^q = \mathbf{m}^{p+q}}$.

4. On souhaite étendre cette identité à la puissance 1 donc on souhaite que $\mathbf{m}^1 \cdot \mathbf{m}^q = \mathbf{m}^{1+q}$ donc (al. 2) que $\mathbf{m}^1 \cdot \mathbf{m}^q = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^q$, donc que, après une division des deux membre par $\mathbf{m}^q$, $\boxed{\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}}$. **La puissance 1 d'une unité est cette unité**.

5. **La puissance zéro d'une unité est 1** : en effet, nous avons $\mathbf{m}^0\ \mathbf{m}^p = \mathbf{m}^{0-p} = \mathbf{m}^p$, ce qui après une division des deux membres par $\mathbf{m}^p$ démontre que **la puissance zéro d'une unité par elle-même est l'unité 1** : $\boxed{\mathbf{m}^0 = \mathbf{1}}$.

6. Le tableau 06c démontre pour p au moins égal à 2 $\boxed{\mathbf{m}^p\ \mathbf{s}^p = (\mathbf{m}\ \mathbf{s})^p}$.
Si $p = 1$, selon l'al. 4, $\mathbf{m}^1\ \mathbf{s}^1$ est par définition $\mathbf{m}\ \mathbf{s}$, soit $(\mathbf{m}\ \mathbf{s})^1$.
Si $p = 0$, selon l'al. 5, $\mathbf{m}^0\ \mathbf{s}^0$ est par définition $\mathbf{1}\ \mathbf{1} = \mathbf{1}$, soit $(\mathbf{m}\ \mathbf{s})^0$.
La multiplication de deux unités à la même puissance est cette puissance de leur multiplication.

Quotient d'unités

7. On souhaite que l'identité de l'al. 3 soit étendue au cas $\mathbf{m}^{p-q+q} = \mathbf{m}^p$ donc que $\mathbf{m}^{p-q} \cdot \mathbf{m}^q = \mathbf{m}^p$ donc que par une division des deux membres par $\mathbf{m}^q$ $\boxed{\mathbf{m}^{p-q} = \dfrac{\mathbf{m}^p}{\mathbf{m}^q}}$.

Unités composées

8. Vu les al. 3 et 9, $\mathbf{m}^p\ \mathbf{s}^{-q} \cdot \mathbf{s}^q = \mathbf{m}^p$, donne par division des deux membres par $\mathbf{s}^q$ $\boxed{\mathbf{m}^p\ \mathbf{s}^{-q} = \dfrac{\mathbf{m}^p}{\mathbf{s}^q}}$.

Unités cinématiques

9. L'unité de vitesse est définie par le tableau 06c. La formule $V_x = \dfrac{x}{t}$ réécrite avec les unités, celle de la vitesse étant une inconnue **u**, devient $V_x\ \mathbf{u} = \dfrac{x\ \mathbf{m}}{t\ \mathbf{s}}$. Pour 1 mètre et 1 seconde, il vient $V_x = 1$ donc $1\ \mathbf{u} = \dfrac{1\ \mathbf{m}}{1\ \mathbf{s}}$ soit $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$.

$\boxed{\text{L'unité d'une vitesse est le } \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}} = \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1}}$.

10. L'unité d'accélération est définie par le tableau 06d. La formule $a_x = \dfrac{V_x}{t}$ écrite avec les unités, celle de la vitesse étant une inconnue **u**, devient $a_x\ \mathbf{u} = \dfrac{x\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1}}{t\ \mathbf{s}}$. Pour $1\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1}$ et 1 seconde, il vient $a_x = 1$ donc $1\ \mathbf{u} = \dfrac{1\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1}}{1\ \mathbf{s}}$ soit $\mathbf{u} = \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1}\ \mathbf{s}^{-1} = \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2}$. $\boxed{\text{L'unité d'une accélération est le } \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}}$.

Recherche d'une unité composée inconnue

11. On étudiera (§09) la formule $F = m\ a$. Si m est une masse en **kg** et a une accélération en $\mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2}$ alors F sera en $\mathbf{kg}\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2}$ et cette unité composée est appelée le **newton**.

12. On étudiera (§20) la formule $F = G\dfrac{m\ m'}{R^2}$ où F est en **newtons**, m et m' en **kg** et R est une distance en **m**. On a l'équation chez les unités $\mathbf{kg}\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2} = \mathbf{u}\ \mathbf{kg}^2\ \mathbf{m}^{-2}$ dont l'inconnue est l'unité **u** de G. Une multiplication des deux membres par $\mathbf{kg}^{-2}\ \mathbf{m}^2$ donne $\mathbf{kg}\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-2}\ \mathbf{kg}^{-2}\ \mathbf{m}^2 = \mathbf{u}$ donc l'unité de la grandeur G est $\mathbf{kg}^{-1}\ \mathbf{m}^3\ \mathbf{s}^{-2}$.

Énoncé	Puissance $\mathbf{m}^p$	Multiplicateur	Associativité	Conclusion
$\mathbf{m}^p \cdot \mathbf{m}$ = ?	**m … · m** **m** écrit *p* fois	**m** **m** écrit 1 fois	**m … · m · m** **m** écrit p + 1 fois	$= \mathbf{m}^{p+1}$

Tableau 10a

Énoncé	Puissance m^p	Puissance m^q	Associativité	Conclusion
$\mathbf{m}^p \cdot \mathbf{m}^q$ = ?	**(m … · m)** **m** écrit *p* fois	**(m … · m)** **m** écrit *q* fois	**m … · m · m … · m** **m** écrit *p* + *q* fois	$= \mathbf{m}^{p+q}$.

Tableau 10b

distance	Temps
x	*t*
V_x	1

Tableau 10c

vitesse	Temps
V	*t*
a_x	1

Tableau 10d

Énoncé	Puissance m^p	Puissance m^q	Associativité	Conclusion
$\mathbf{m}^p \cdot \mathbf{s}^p$ = ?	**(m … · m)** **m** écrit *p* fois	**(s … · s)** **s** écrit *p* fois	**m · s … · m · s** **m s** écrit *p* fois	$= (\mathbf{m\ s})^p$.

Tableau 06e

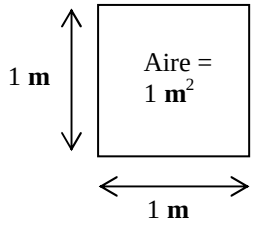


Fig. 10a : le mètre carré

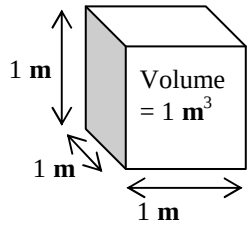


Fig. 10b : le mètre cube

ATTENTION : l'addition ou la soustraction ne peut se faire que dans la même unité
(souvenons-nous de la maxime "on additionne pas des choux et des carottes")**.**
Le résultat est dans cette unité.
Exemples : 180 **cm** + 25 **cm** = 205 **cm** ; 180 **cm** – 25 **cm** = 165 **cm**.
C'est un cas mathématique de la **distributivité** :
180 **cm** + 25 **cm** = (180 + 25) **cm**
180 **cm** – 25 **cm** = (180 – 25) **cm**

§11 Traçage par le corps en mouvement de la vitesse et de l'accélération

Traçage de la vitesse quand elle est constante

1. ***Si on suit le corps pendant une seconde***, alors une des formules sous le tableau §03a donne $\boxed{x = V_x \cdot 1}$, donc ***il parcoure une distance numériquement égale à la vitesse***.
Note : le 1 de cette formule est en **seconde**.

Mouvement sur une droite

2. Si l'accélération est constante et si la vitesse initiale est nulle ***si on suit le corps pendant*** $\sqrt{2}$ ***seconde***, alors la loi de Galilée donne $x = 1/2\ a_x \sqrt{2}^2 = a_x \cdot 1$ donc $\boxed{x = a_x \cdot 1}$, donc ***il parcoure une distance numériquement égale à l'accélération***.
Note : le 1 de cette formul est en **seconde**.

Mouvements sur un plan

3. Sur une très ancienne idée des architectes, un mouvement plan est décomposé en deux mouvements rectilignes (figure 07b). Les couleurs des constructions géométriques pour la vitesse (en bleu) et l'accélération (en gris) sont respectées.
4. Sur la figure 07b, dans le triangle rectangle MBC s'applique le théorème de Pythagore. Si on nomme respectivement V et a les longueurs des flèches vitesse et accélération, nous avons
$V^2 = V_x^2 + V_y^2$ et $a^2 = a_x^2 + a_y^2$: **le carré d'une vitesse ou d'une accélération est égal à la somme des carrés de ses coordonnées**.

Mouvement dans l'espace

5. On imagine facilement qu'une troisième coordonnée, la cote, intervient et joue le même rôle que l'abscisse et l'ordonnée (figure 07c). La figure est dans l'espace et dessinée en perspective. Les couleurs des constructions géométriques pour la vitesse (en bleu) et l'accélération (en gris) sont respectées.
6. On peut écrire
$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ et $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. **La règle précédente s'applique dans l'espace**.
7. Démonstration : les triangles MQH et MHP sont rectangles respectivement en Q et en H. On a donc successivement $MP^2 = MH^2 + HP^2 = MQ^2 + QH^2 + HP^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ ■

Vitesse moyenne et instantanée

8. On a vu au §04 que $\lim_{h \to 0} \frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} = V_x(t)$. On peut reprendre une démonstration analogue en ordonnée et en cote et démontrer les formules $\lim_{h \to 0} \frac{y(\tau + h) - y(\tau)}{h} = V_y(t)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{z(\tau + h) - z(\tau)}{h} = V_z(t)$.
9. Les trois valeurs $V_x(t)$, $V_y(t)$ et $V_z(t)$ sont les cordonnées d'une flèche du vecteur (§38) vitesse $\vec{V}(t)$.

Accélération moyenne et instantanée

10. On peut répéter ce qui précède à partir de la notion d'accélération moyenne pour définir l'accélération instantanée.
11. $\lim_{h \to 0} \frac{V_x(\tau + h) - V_x(\tau)}{h} = a_x(t)$. On peut reprendre une démonstration analogue en ordonnée et en cote et démontrer les formules $\lim_{h \to 0} \frac{V_y(\tau + h) - V_y(\tau)}{h} = a_y(t)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{V_z(\tau + h) - V_z(\tau)}{h} = a_z(t)$.
12. Les trois valeurs $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ sont les cordonnées d'une flèche du vecteur (38) vitesse $\vec{a}(t)$.

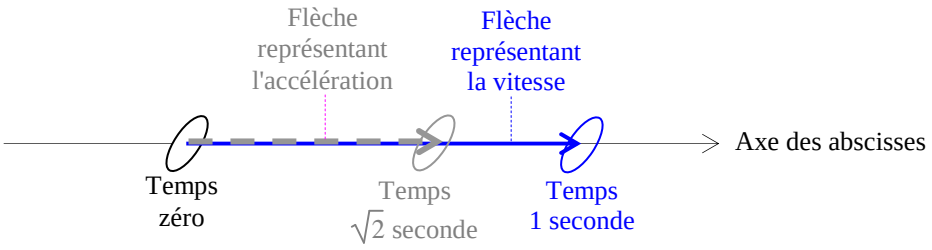


Fig. 11a en 1 dimension

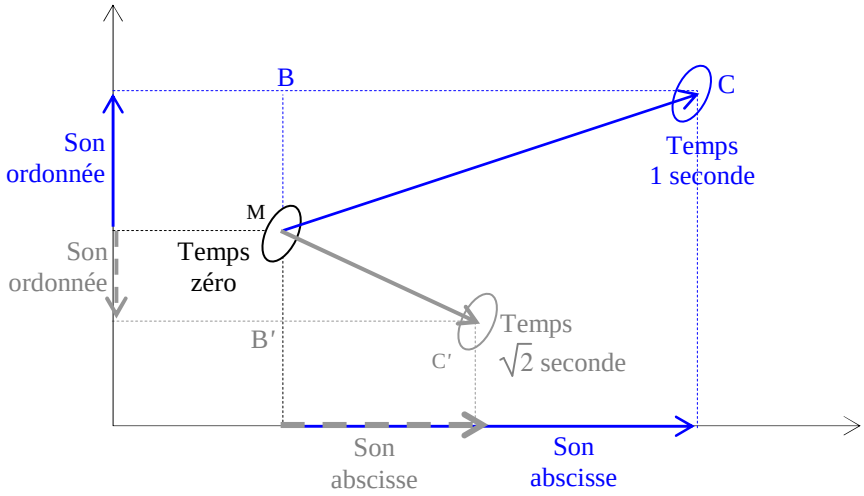


Fig. 11b en 2 dimensions

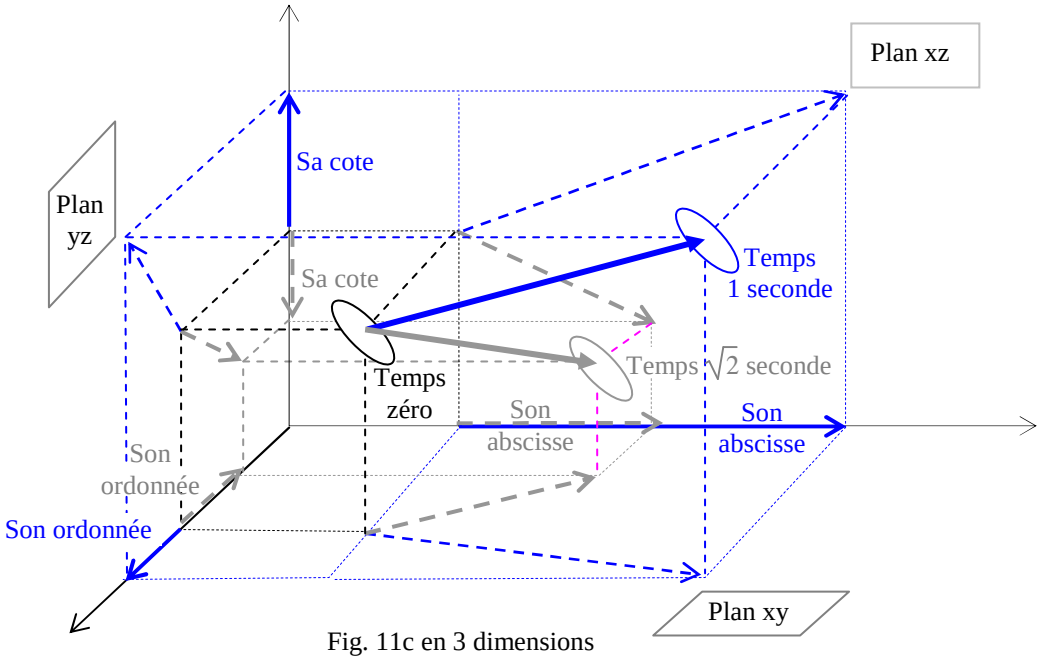


Fig. 11c en 3 dimensions

2 Dynamique

§12 Initier à la dynamique

1. Comment Isaac Newton a-t-il convaincu ses contemporains de sa définition de la notion de force, nul ne le sait. Cependant, au moins un élément du contexte culturel de l'œuvre du grand savant est sûr :
dans le monde anglo-saxon du XVIIe siècle, une force (en anglais *strength*) était un pouvoir d'accélérer les corps, et **un pouvoir qui ne se consomme pas quand il est exercé.**
2. Aussi pouvons-nous imaginer un scénario à partir de cette idée.
3. La scène se passe dans la salle de réunion habituelle de la *Royal Academy of Science*, fondée en 1660. Newton propose à son auditoire deux expériences de pensée à fin de mettre à contribution la logique personnelle des gens de l'assistance.
4. Soient deux voies de chemin de fer de mine parallèles et horizontales. Sur chaque voie est posé un wagonnet : appelons-le A sur la première ligne et B sur l'autre. Les deux wagonnets sont côte à côte, identiques, vides, et ont tous les deux dix unités de masse.
5. **Note**. A l'époque, les unités de mesure des grandeurs qui nous sont familières, le mètre et le kilogramme par exemple, n'étaient pas encore inventées. Par contre, la seconde était déjà une unité de temps connue de tout le monde. Pour éviter un anachronisme, je ne nommerai pas l'unité des masses.
6. Note. Une masse se mesure avec une balance (figure 09d).
7. Les expériences de pensée consistent à demander à deux mineurs ou à deux volontaires de pousser les wagonnets pendant un temps donné avec une force ajustée pour obtenir une vitesse donnée, donc obtenir une accélération donnée (figure 09a).
8. *Première expérience.* Le wagonnet A reste vide et le wagonnet B et le sable qu'il contient font 20 unités de masse. Aux deux mineurs on demande de donner aux deux wagonnets la même accélération. Après quelques répétitions, ils y parviennent (figure 09b).
Newton demanda : Quelle est la **force** de poussée la plus grande ? A l'unanimité du public la réponse fut le B.
Newton demanda : Et combien de fois plus grande ? A l'unanimité du public la réponse fut *deux fois*.
9. *Deuxième expérience.* On vide le wagonnet B. Aux deux mineurs on demande de donner au wagonnet B une accélération triple de celle de A, c'est-à-dire qu'après le même temps de poussée la vitesse acquise par B soit trois fois plus grande que celle acquise par A. Après quelques répétitions, ils y parviennent (figure 09c).
Newton demanda : Quelle est la **force** de poussée la plus grande ? A l'unanimité du public la réponse fut : le B.
Newton demanda : Et combien de fois plus grande ? A l'unanimité du public la réponse fut *trois fois*.
10. Pour expliquer les résultats de ces deux expériences, NEWTON proposa de **définir** la force de poussée en multipliant la masse *m* par l'accélération produite *a*, ce qui donne la loi $\boxed{F = m\,a}$.
Une force est définie en multipliant la masse accélérée par l'accélération qu'elle produit.
11. **Unités actuelles** : si la masse est en **kg** et l'accélération en $\mathbf{m\,s^{-2}}$, alors la force est en **Newtons** (**N**). On a donc l'identité $\boxed{\mathbf{N = kg\,m\,s^{-2}}}$.
12. Le poids des corps est la cause de leur accélération vers le bas quand il chute, donc est bien dans le cadre de cette théorie. On a donc la **relation entre poids et masse** $\boxed{F^{\text{poids}} = m\,g}$ où *g* est l'accélération des chutes libres (§03).

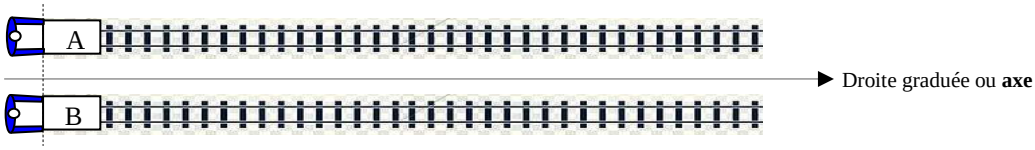


Fig. 12a

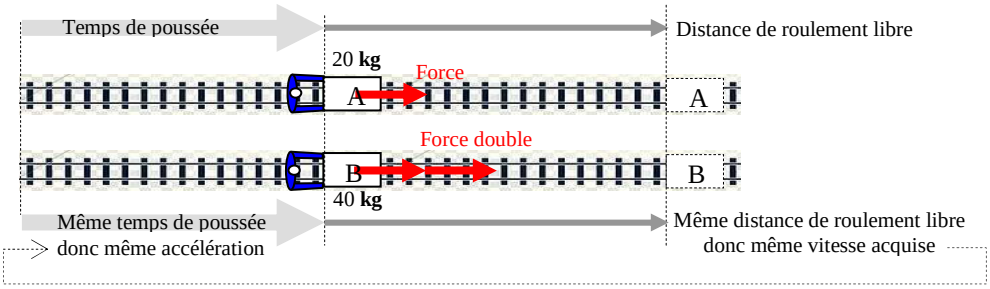


Fig. 12b

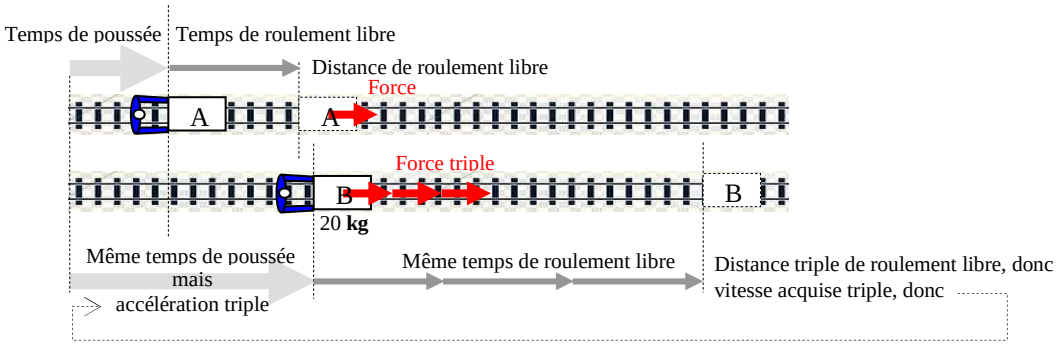


Fig. 12c

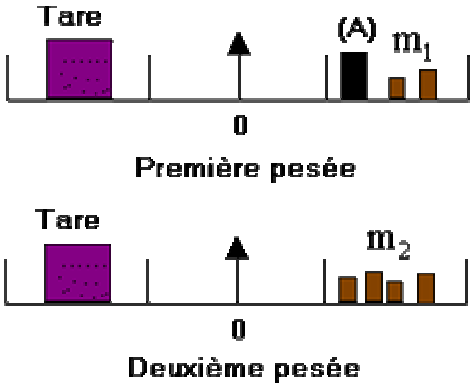


Fig. 12d : double pesée.
La masse mesurée est la solution m_A de l'équation $m_A + m_1 = m_2$.

Crédit : http://crefoc.tripod.com/Benletaief/fiph101.htm

§13 Traçage par le corps en mouvement de la vitesse et de l'accélération

Mouvements sur un plan

1. ***Si on suit le corps pendant une seconde comme si elle avait cessé de vaier***, alors une des formules sous le tableau §03a donne $\boxed{x = V_x \cdot 1}$, donc ***il parcoure une distance égale à la vitesse***.
   Note : le 1 de cette formule est en **seconde**.
2. Si la vitesse initiale est nulle et ***si on suit le corps pendant $\sqrt{2}$ seconde comme si elle avait cessé de vaier***, alors la loi de Galilée donne $x = 1/2\ a_x \sqrt{2}^2 = a_x \cdot 1$ donc $\boxed{x = a_x \cdot 1}$, donc ***il parcoure une distance numériquement égale à l'accélération***.
   Note : le 1 de cette formul est en **seconde**.

Mouvements sur un plan

3. Note : les deux flèches vitesse et accélération ont des orientations en général indépendantes.
4. Sur une très ancienne idée des architectes, un mouvement plan est décomposé en deux mouvements rectilignes (figures 10c et 10d). La position initiale est en gris et la finale en bleu. Dans le triangle rectangle MBC s'applique le théorème de Pythagore. Si on nomme respectivement V et a les longueurs des flèches vitesse et accélération, nous avons
   $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ et $a^2 = a_x^2 + a_y^2$: **le carré d'une vitesse ou d'une accélération est égal à la somme des carrés de ses coordonnées**.

Mouvement dans l'espace

5. On imagine facilement qu'une troisième coordonnée, la cote, intervient et joue le même rôle que l'abscisse et l'ordonnée. Les figures 10e et 10f sont dans l'espace et difficiles à dessiner.
   $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ et $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. **Le carré d'une vitesse ou d'une accélération est égal à la somme des carrés de ses coordonnées**.

Vitesse moyenne et instantanée

6. On a vu au §04 que $\lim_{h \to 0} \frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} = V_x(t)$. On peut reprendre une démonstration analogue en ordonnée et en cote et démontrer les formules $\lim_{h \to 0} \frac{y(\tau + h) - y(\tau)}{h} = V_y(t)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{z(\tau + h) - z(\tau)}{h} = V_z(t)$.
7. Les trois valeurs $V_x(t)$, $V_y(t)$ et $V_z(t)$ sont les cordonnées d'une flèche du vecteur (§38) vitesse (t).

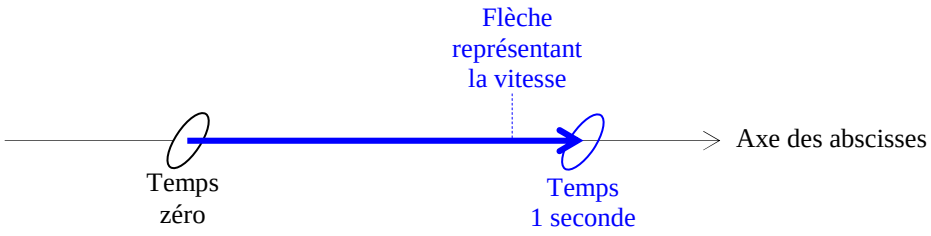


Fig. 13a en 1 dimension

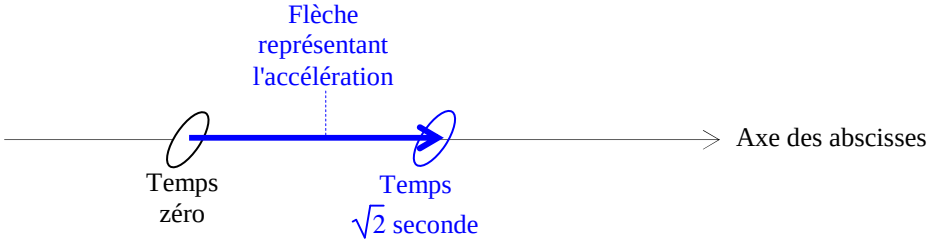


Fig. 13b en 1 dimension

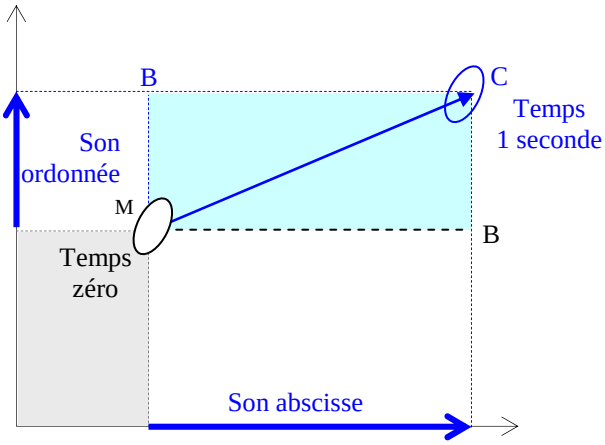


Fig. 13c tracé de la flèche vitesse en 2 dimensions

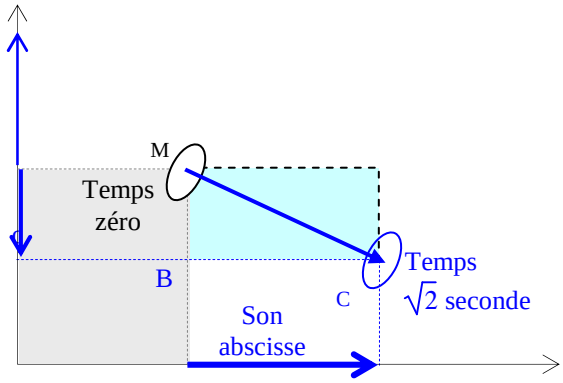


Fig. 13d tracé de la flèche accélération en 2 dimensions

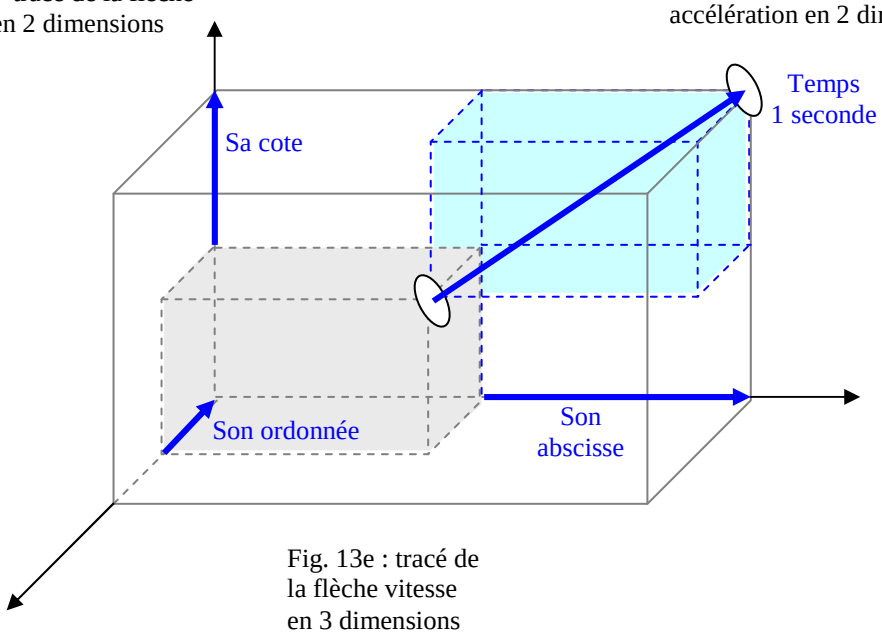


Fig. 13e : tracé de la flèche vitesse en 3 dimensions

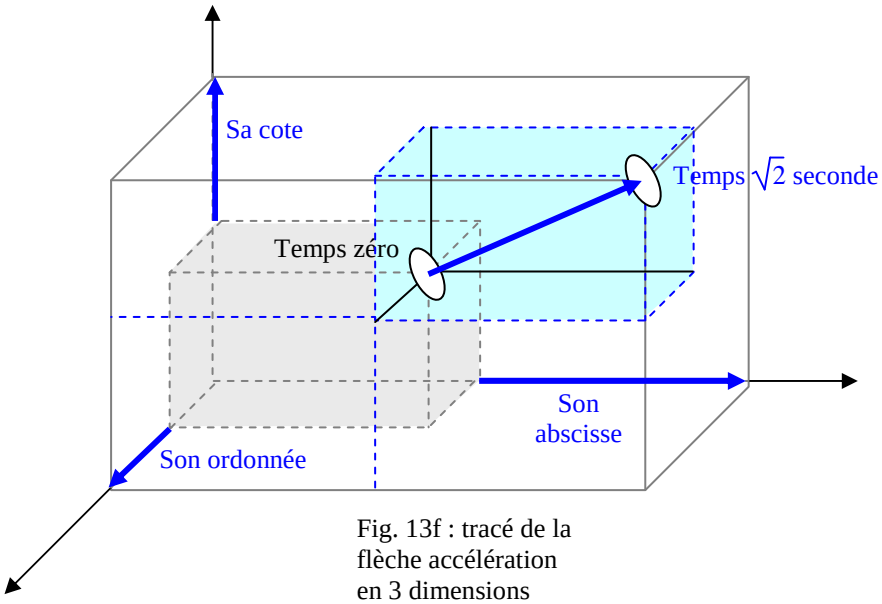


Fig. 13f : tracé de la flèche accélération en 3 dimensions

§14 Forces et vecteurs

1. Newton fut avant tout un mathématicien, notamment un géomètre. A côté des voies de chemin de fer de mine, il faut imaginer un repère du plan orienté n'importe comment par rapport aux rails (fig. 12a).
2. Newton ignorait la notion de vecteur, mais considérait que toute flèche parallèle, de même sens et de même longueur à une flèche donnée représentant une force représentent aussi cette force.
3. L'invention du vecteur fut tardive dans l'histoire des sciences.
4. Il y eut plusieurs tentatives qui échouèrent à cause de l'hostilité de nombreux scientifiques à cette idée.
5. En France notamment, la tentative de Fresnel fut sévèrement critiquée par un autre Français, Poisson.
6. C'est pourquoi nos élèves ont tant de peine à comprendre la logique des vecteurs, d'autant plus que deux obstacles psychologiques sont à surmonter.
7. Premier obstacle : un vecteur ne peut pas être dessiné, mais seulement une ou quelques flèches lui appartenant.
8. L'autre obstacle est que si de nombreux élèves sont à l'aise avec les vecteurs en géométrie pure, ils peinent à s'en servir pour représenter une force en physique. En effet sur ce thème des forces, les deux disciplines paraissent dans leur esprit indépendantes l'une de l'autre.

9. La fig. 12a montre que tout se passe comme si les deux composantes représentées par $\overrightarrow{F_x}$ et $\overrightarrow{F_y}$ se comportent comme deux vraies forces simultanées (§11) et on écrit alors que le vecteur $\overrightarrow{F}$ est la somme $\overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}$.

10. Bien entendu, les vrais mouvements se font dans notre espace à trois dimensions. Il faut alors imaginer que la force ait une troisième composante en cote, représentée par une flèche du vecteur $\overrightarrow{F_z}$. La figure est difficile à dessiner (fig. 12b) et on peut écrire que le vecteur $\overrightarrow{F}$ est la somme $\overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y} + \overrightarrow{F_z}$ en suivez les flèches rouges en trait plein.

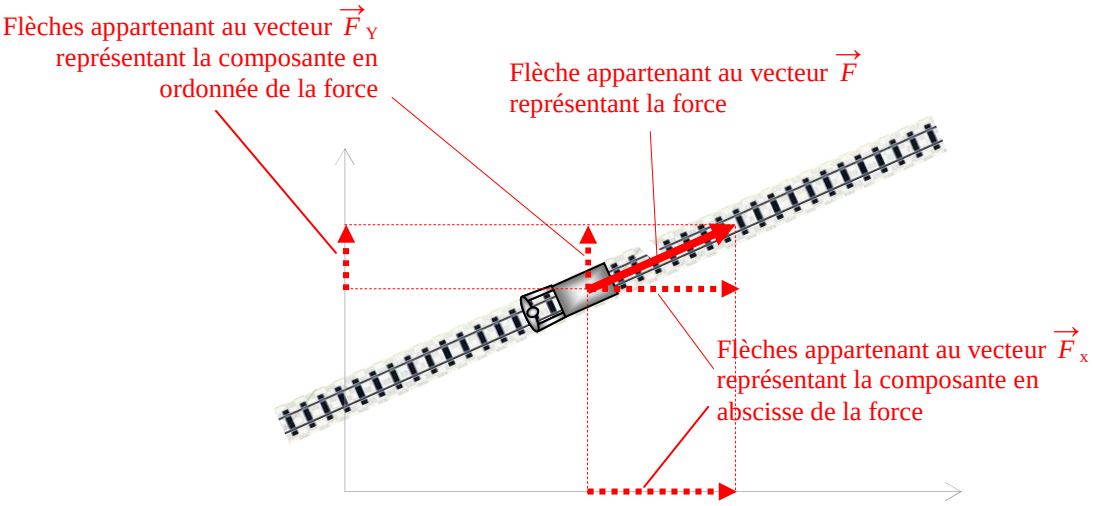


Fig. 14a

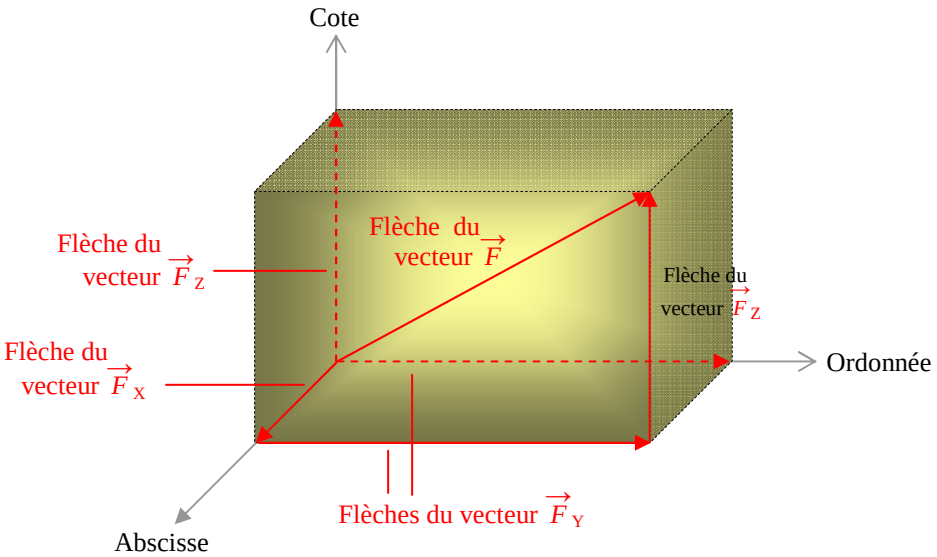


Fig. 14b

§15 Moment de force

1. Le **moment d'une grandeur vectorielle** est l'aire du parallélogramme construit sur l'origine du repère, l'empennage et la pointe d'une flèche du vecteur.

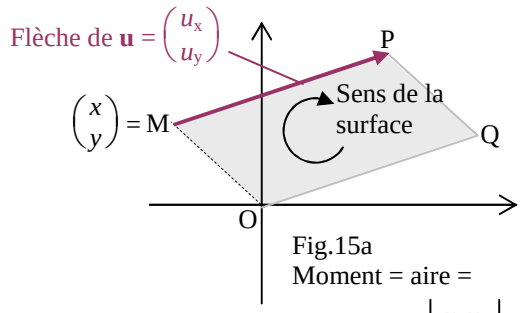


Fig.15a
Moment = aire =
$x\,u_y - y\,u_x = \begin{vmatrix} x & u_x \\ y & u_y \end{vmatrix}$

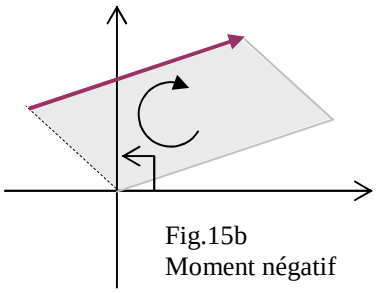


Fig.15b
Moment négatif

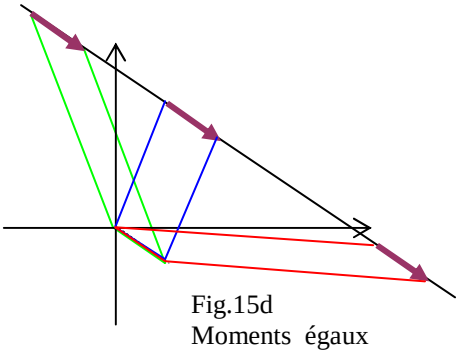


Fig.15d
Moments égaux

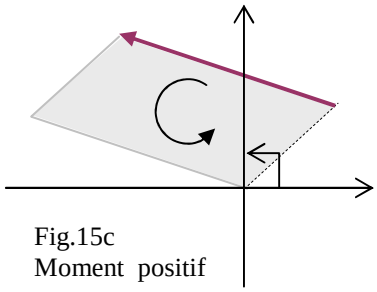


Fig.15c
Moment positif

2. Les figures montrent la définition, la convention de signe et l'invariance du moment pour les flèches d'un vecteur donné portées par une droite donnée.
3. La vitesse du moment cinétique (la grandeur est la vitesse) est le moment de l'accélération (paragraphe 6).
4. Multiplié par la masse, on obtient $m\,(x\,a_y - y\,a_x) = x\,m\,a_y - y\,m\,a_x = x\,F_y - y\,F_x$ = moment de la force.
5. En mouvement circulaire, le moment de l'accélération centripète est $x \cdot (-y \cdot \omega^2) - y\,(-x \cdot d\omega/dt) = 0$ et le moment de l'accélération tangentielle est $x \cdot (-x \cdot d\omega/dt) - y\,(y \cdot d\omega/dt) = -(x^2 + y^2) \cdot d\omega/dt$.
6. On en déduit deux moments de force, l'un est celui d'une **force centripète** d'intensité $F^{\perp} = m\,R\,\omega^2$ de moment nul et d'une **force tangentielle** d'intensité $F^{//} = m\,R\,|d\omega/dt|$ et de moment $m\,R^2 \cdot d\omega/dt$.
7. Définition : le **moment d'inertie** est la quantité $J = m\,R^2$ du point matériel. Son unité est le **kg m²**.
8. On obtient l'analogue en moments de la définition de Newton de la force $J\,d\omega/dt = \mathcal{M}$ avec $\mathcal{M} = x\,F_y - y\,F_x$.
9. Les systèmes physiques ne sont jamais contenus dans un plan, mais ont une troisième dimension. Les figures page suivantes montrent comment les moments sont en trois dimensions considérés : comme une **flèche moment** parallèle à l'axe des cotes, donc de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{M} \end{pmatrix}$ et pour le moment d'inetrtie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,R^2 \end{pmatrix}$.
10. Lorqu'on passe du point matérialisé à un système solide quelconque, on additionne membre à membre les équations précédentes. La distance R devient alors celle séparant les points en mouvement de l'axe des cotes :
$\sum_{\text{système}} m\,R^2\,d\omega/dt = \left(\sum_{\text{système}} m\,R^2\right) d\omega/dt = \sum_{\text{causes}} \mathcal{M}$.
Comme pour la définition de Newton de la force, les moments sont classés selon l'appartenance des causes au système. Pour les causes internes, sachant les forces réciproques deux à deux opposées, et à l'exclusion des forces exercées à distance, les points matérialisés (atomes, molécules) concernés à la fois très petits et en contact, additionner deux moments $x_A\,F_{Ay} - y_A\,F_{Ax}$ et $x_B\,F_{By} - y_B\,F_{Bx}$ avec $F_{A\ x\ ou\ y}$ opposé à $F_{B\ x\ ou\ y}$ et $x_{A\ ou\ B}$ comme $y_{A\ ou\ B}$ très proches donne zéro, donc il reste l'addition des moments des forces dont les causes sont extérieure au système.
11. D'une part J devient l'addition $\sum_{\text{système}} m\,R^2$ où les R sont les distances séparant les points en mouvement de l'axe des cotes et d'autre part $\mathcal{M}$ devient l'addition des moments d'origine extérieure (sauf cas de force internes à distance).

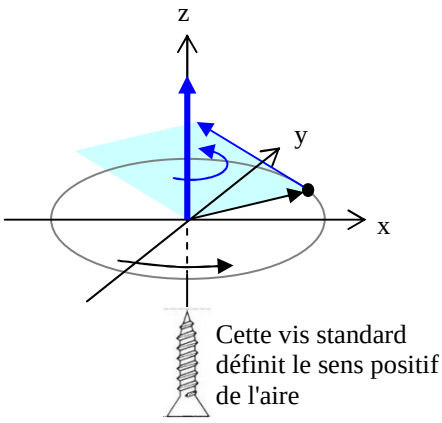


Fig.15 a
Le moment cinétique
de rotation

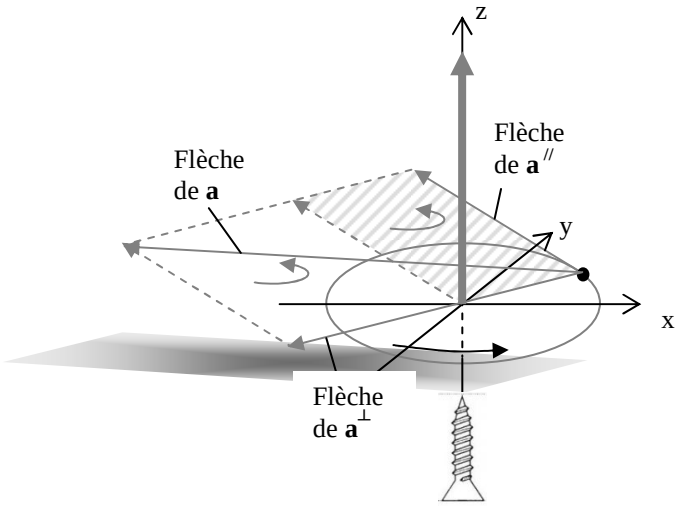
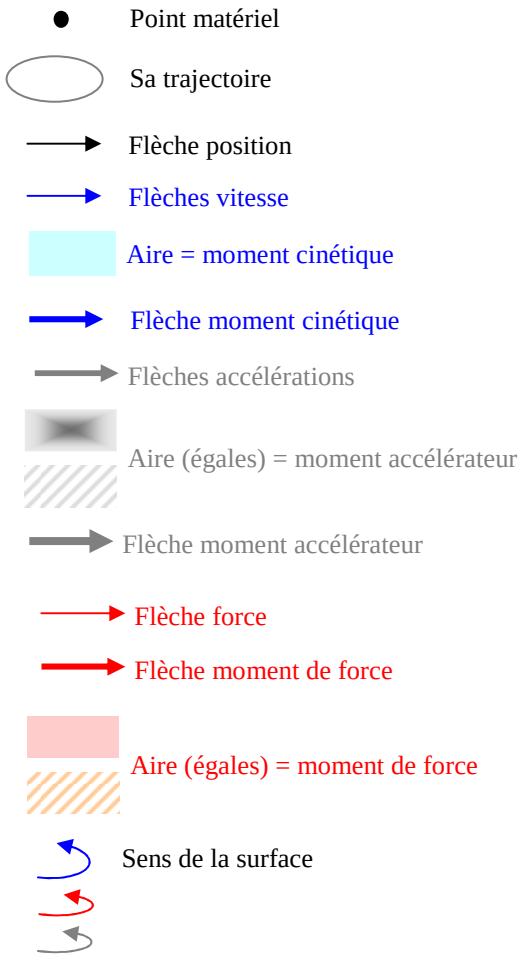


Fig.15 a
Le moment de l'accélération



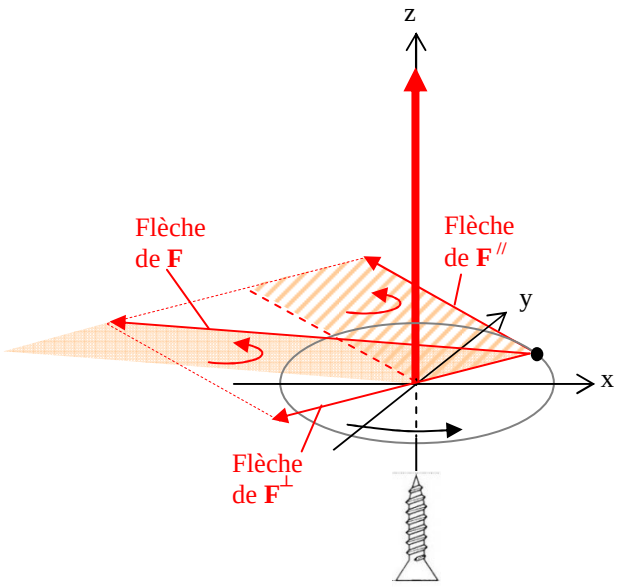


Fig.15 a
Le moment de la force

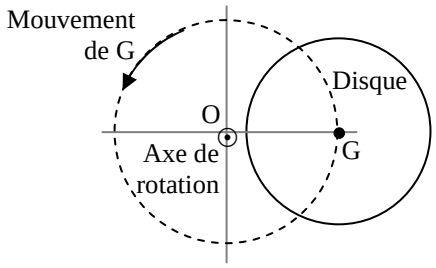
§16 Calculs de moments d'inertie

1. Principe : on décompose en pensée le corps et petites parties de masses dm et distantes de l'axe de rotation de R. Chaque masse partielle est elle-même proportionnelle à son volume dV dm = μ dV.
Ce volume est lui-même exprimé à partir des dimensions qui sont l'éloignement dR à l'axe de rotation, un arc dL et une épaisseur dh : dV = dR dh dL donc dm = μ dR dh dL. La part de moment d'inertie est donc dJ = dm R^2 = μ dR dh dL R^2.
2. **Cerceau** : R est uniforme, donc dJ/dm est la constante R^2 donc est la dérivée de $m R^2$ donc on adopte $\boxed{J_{\text{cerceau}} = m R^2}$. Note : la masse du cerceau est m = μ dR dh L.
3. **Disque** (autour de son axe perpendiculaire)
On cumule les moments des cerceaux concentriques constituant le disque. La part d'un cerceau sur le moment d'inertie est dJ = dm R^2 avec dans le rôle de dm la quantité μ dR dh L. Le périmètre L est 2 π R donc dm est la quantité μ dR dh 2 π R donc dJ = μ dR dh 2 π R^3 donc dJ/dR = μ dh 2 π R^3. ici, μ dh 2 π joue le rôle d'une constante donc on adopte $J = \mu\, dh\, 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \mu\, dh\, \pi R^4$.
L'aire du disque est π R^2 donc dh π R^2 est son volume donc μ dh π R^2 est sa masse donc on retient $\boxed{J_{\text{disque}} = \frac{1}{2} m R^2}$.
4. **Cylindre** (autour de son axe central)
On cumule les moments d'inertie des disques empilés constituant le cylindre. La part d'un disque au moment d'inertie est donc $dJ = \frac{1}{2} \mu\, dh\, \pi R^4$ donc $dJ/dR = \frac{1}{2} \mu\, \pi R^4$ où $\frac{1}{2} \mu\, \pi R^4$ joue le rôle d'une constante. On a
On adopte donc $\boxed{J_{\text{cylindre}} = \frac{1}{2} m R^2}$.

Cône (autour de son axe)
On cumule les moments d'inertie des disques empilés. La part d'un disque au moment d'inertie est $dJ = \frac{1}{2} \mu\, dh\, \pi R^4 = \frac{1}{2} \mu\, dh\, \pi k^4 h^4$ $dJ/dh = \frac{1}{2} \mu\, \pi k^4 h^4$, où $\frac{1}{2} \mu\, \pi k^4$ joue le rôle d'une constante. La fonction $\frac{1}{5} h^5$ a h^4 comme dérivée donc on adopte $J = \frac{1}{10} \mu\, \pi k^4 h^4$ donc $\boxed{J_{\text{cône}} = \frac{1}{10} \mu\, \pi R^4}$. Ce moment d'inertie est indépendant de la hauteur du cône.
5. **Demi boule** (autour de son axe central)
On cumule les moments d'inertie des disques empilés. La part d'un disque au moment d'inertie est $dJ = \frac{1}{2} \mu\, dh\, \pi r^4$. Mais (théorème de Pythagore) $r^2 = R^2 - h^2$ donc $r^4 = (R^2 - h^2)^2$ donc
$dJ/dh = \frac{1}{2} \mu\, \pi (R^4 - 2 R^2 h^2 + h^4)$. Les quantités μ, π et R jouent le rôle de constantes. Ici, h^2 est la dérivée de $\frac{1}{3} h^3$ et h^4 celle de $\frac{1}{5} h^5$ donc l'ensemble entre parenthèses est la dérivée de $R^4 h - 2 R^2 \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{5} h^5$. On adopte $J = \frac{1}{2} \mu\, \pi \left(R^4 - 2 R^2 \frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{5} h^5 \right)$. C'est le moment d'inertie d'une tranche de demi boule entre sa base et un plan parallèle situé à la hauteur h. Pour $h = R$ on obtient $\frac{1}{2} \mu\, \pi R^5 (1 - 2 \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} \mu\, \pi R^5 \frac{8}{15}$.

Boule
On cumule sur les deux demi-boules donc $\boxed{J_{\text{boule}} = \frac{8}{15} \mu\, \pi R^5}$.
Note : le volume d'une sphère est $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{5}{2} \frac{8}{15} \pi R^3$ donc sa masse est $m = \frac{5}{2} 5 \frac{8}{15} \mu\, \pi R^3$ donc $\boxed{J_{\text{boule}} = \frac{5}{2} m R^5}$.

6. Souvent, l'objet ne tourne pas autour de son centre ou axe de symétrie. Un théorème permet de surmonter cette difficulté. Une masse dm_i située à la distance R de l'axe de rotation a un moment d'inertie $dJ = dm\ R^2 = dm\ (x^2 + y^2 + z^2) = dm\ x^2 + dm\ y^2 + dm\ z^2 = J_x + J_y + J_z$.
7. Soit x_G l'abscisse du centre de masse définie comme solution de l'équation $m\ x_G = \sum_{corps\ i} dm_i\ x_i$ avec $m = \sum_{corps\ i} dm_i$. On a $\sum dm_i\ x_G = \sum dm_i\ x_i$ donc $\sum dm_i\ x_G - \sum dm_i\ x_i$ soit $\sum (dm_i\ x_G - dm_i\ x_i)$ soit $\sum dm_i\ (x_G - x_i) = 0$.
8. Un artifice de calcul donne $J_x = \sum dm_i\ \left[x_G + (x_i - x_G)\right]^2$.
   Une identité ramarquable donne $J_x = \sum dm_i\ \left[x_G^2 + (x_i - x_G)^2 + 2\ x_G\ (x_i - x_G)\right]$.
   Un développement donne $J_x = \sum dm_i\ x_G^2 + \sum dm_i\ (x_i - x_G)^2 + 2 \sum dm_i\ x_G\ (x_i - x_G)$.
9. Parce que x_G est facteur commun, le premier terme est $\sum dm_i\ x_G^2 = \left(\sum dm_i\right) x_G^2 = m\ x_G^2$ soit la partie abscisse J_{xG} du moment d'inertie du centre de masse.
10. Parce que x_G est facteur commun, et vu l'al. XX, le troisième terme est nul.
11. Le deuxième terme est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation passant par le centre de masse. On résume : le moment d'inertie d'un système se calcule en additionnant le moment d'inertie de son centre de masse (moment d'inertie interne) et le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par ce centre de masse (moment d'inertie externe).
12. Exemple : expression du mment d'inertie d'un disque par rapport à un axe hors de celui-cu mais dans son plan.



$$J = m\ OG^2 + \frac{1}{2} m\ R^2$$

Moment externe — Moment interne

§17 Exemples d'usage des moments

Corps au bilan des moments nul

1. On a nullité de la quantité $J\,d\omega/dt$ donc conservation de $J\,\omega$. Une variation interne de J occasionne une variation de la vitesse angulaire ω **inversement proportionnelle** : $J_{\text{après}}\,\omega_{\text{après}} = J\,\omega$. Le tableau de proportion est lui aussi inversé.
2. Dans ce cas, our un corps conservant sa masse mais contracté par homothétie, la vitesse angulaire est inversement proportionnelle au carré de ses dimensions.

UN EXEMPLE ARTISTIQUE

3. Un exemple spectaculaire se voit dans un ballet d'opéra ou un concours de patinage sur glace : en rotation, en écartant les bras le danseur augmente une partie de son moment d'inertie donc diminue sa vitesse angulaire alors qu'en les abaissant, il l'augmente.

UN EXEMPLE ASTRONOMIQUE : LES PULSARS

4. Les pulsars ont été découverts en 1967 par Jocelyn Bell et Antony Hewish à Cambridge alors qu'ils utilisaient un radiotélescope pour étudier la scintillation des quasars. Ils trouvèrent un signal constitué de courtes impulsions de rayonnement se répétant de façon très régulière (période = 1,337 301 192 **s** avec une incertitude de mesure de 0,000000006 **s**). L'aspect très régulier du signal plaidait pour une origine artificielle. Vu que le temps qu'il prenait pour réapparaitre était un jour sidéral et pas un jour solaire, on a compris que l'objet n'est pas lié à la Terre. On a vérifié également que le signal n'est pas lié aux satellites artificiels.Après nombre de discussions on a admis que le seul objet naturel qui pourrait être responsable de ce signal était une étoile à neutrons (un corps constitué essentiellement de neutrons) en rotation rapide doté d'un puissant champ magnétique. Sa masse vaut 1,4 fois la masse du soleil. Son rayon vaut 1,4 millionième du rayon solaire.
5. Hypothèse : lors d'une supernova, une partie de l'astre s'est contractée en éjectant l'autre partie sous forme de gaz et de poussière avec un dégagement d'énergie gigantesque au point de donner une brillance proche de celle d'une petite galaxie pendant quelques jours terrestres. Imaginons que la période de rotation sur lui-même passe de 30 jours à 1,34 seconde. Alors $\frac{\omega}{\omega_{\text{après}}} = \frac{T_{\text{après}}}{T} = \frac{1{,}34\ \mathbf{s}}{30 \times 24{*}3600\ \mathbf{s}} = 5{,}2 \times 10^{-7}$. Le rapport des rayons est la solution positive $\frac{R_{\text{Après}}}{R}$ de l'équation $\left(\frac{R_{\text{Après}}}{R}\right)^2 = \frac{\omega}{\omega_{\text{après}}}$ soit $\frac{R_{\text{Après}}}{R} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{après}}}} = \sqrt{5{,}2 \times 10^{-7}} = 7{,}2 \times 10^{-4} = \frac{1}{1387}$. Les dimensions de la partie effondrée sont divisées par 1387.

$\omega_{\text{après}}$	J
ω	$J_{\text{après}}$
Proportion inverse	

Tableau 16a
Conservation du moment cinétique

$\omega_{\text{après}}$	R^2
ω	$R_{\text{après}}{}^2$
Proportion inverse	

Tableau 16b
Conservation du moment cinétique

Proportion				Note
Temps	Tours	Distance de propagation	Phase	
1	f ou ν	c	ω	c = vitesse de propagation ω = pulsation
T	1	λ	$2\,\pi$	λ = longueur d'onde
		1	n	n = nombre d'onde
			1	Pas de symbole ni de nom standard
t ou h	N	L	θ	

Tableau 16c
Grandeurs ondulatoires

Corps au bilan des forces non nul

§17 Forces simultanées

1. Après de nombreuses expériences et réflexions personnelles, Newton avait *postulé* que lorsqu'un corps subit en même temps plusieurs forces, *chacune accélère comme si les autres n'étaient pas encore intervenues*.
2. La difficulté de ce qui suit est que le raisonnement provisoirement va se détacher de la réalité physique, trouver une conclusion puis revenir à la réalité.
3. On raisonne *comme si* les forces interviennent l'une après l'autre et interviennent seules *comme si* les autres n'étaient pas là. Une force commence son action sur le corps là dans l'espace où les effets des précédentes l'ont laissé.

Polygone des forces.

4. La position initiale (fig. 11a) est à l'instant zéro. À cet instant-là, la vitesse est nulle.
5. Imaginons la première force isolée des autres faisant sa propre accélération : le corps passe de la position initiale à la 2e position en $\sqrt{2\ m}$ seconde.
6. Imaginons maintenant que la deuxième force intervient sur le corps là où il est dans l'espace comme si la première n'était pas intervenue donc comme si la vitesse du corps est nulle.
7. Remettons l'horloge au temps zéro et suivons le mouvement durant $\sqrt{2\ m}$ seconde, et le corps passe de la 2e position à la 3e position.
8. Puis, remettons l'horloge au temps zéro et suivons le mouvement durant $\sqrt{2\ m}$ seconde, et le corps passe de la 3e position à la position finale.
9. Dans ce raisonnement, les flèches rouges continues montrent le déplacement que le corps ferait si une des forces l'accélérait durant $\sqrt{2\ m}$ seconde *sans vitesse initiale*. En effet, répétons-le, il faut toujours penser comme si les autres forces n'étaient pas encore intervenues.
10. La flèche rouge joignant la position de départ et celle d'arrivée montre l'effet total des trois forces ensemble : une accélération unique sans vitesse initiale pendant $\sqrt{2\ m}$ seconde. ***Cette figure est un polygone des forces.***
11. Ce polygone traduit en formules pour un corps en translation donnerait

$$m\ a_x = \sum F_x^{\text{extérieur}}{}_{\text{système}}\ .$$

Une invention géométrique importante : le vecteur

12. Raisonnons sur deux forces simultanées, numérotées 1 et 2.
13. ***Que se passe-t-il si on permute l'ordre d'intervention des forces*** ? C'est indiqué par les flèches roses de la figure 11b. Nous voyons que les deux flèches représentant la même force (la première ou la deuxième) doivent être parallèles, de même sens et de même longueur,
14. Donc ces flèches appartiennent au même **vecteur** (§38). Ainsi les forces sont représentées (figure 11c) chacune par un vecteur, la première par $\overrightarrow{F_1}$ et l'autre par $\overrightarrow{F_2}$.
15. Les figures 11b et 11c sont des **parallélogrammes des forces**.

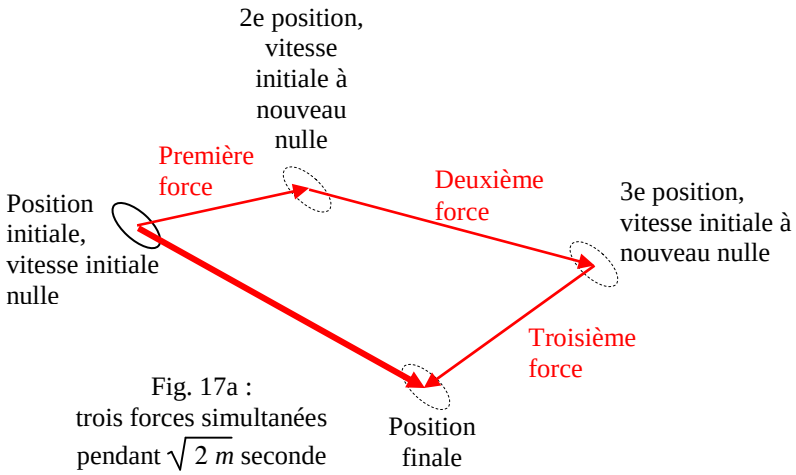


Fig. 17a :
trois forces simultanées
pendant $\sqrt{2\,m}$ seconde

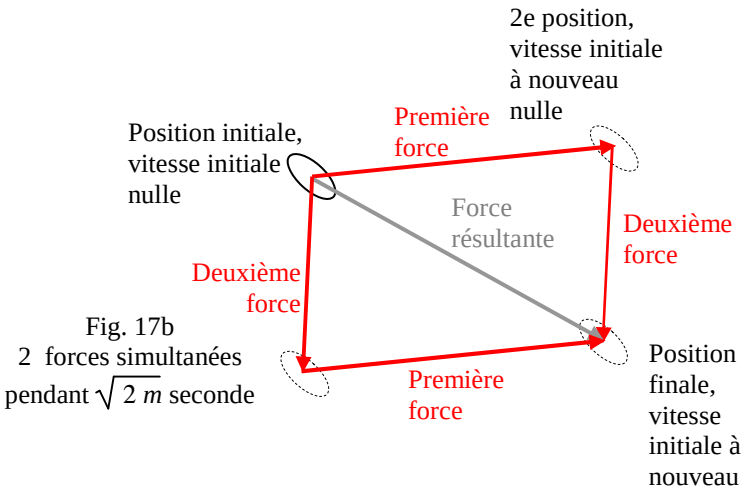


Fig. 17b
2 forces simultanées
pendant $\sqrt{2\,m}$ seconde

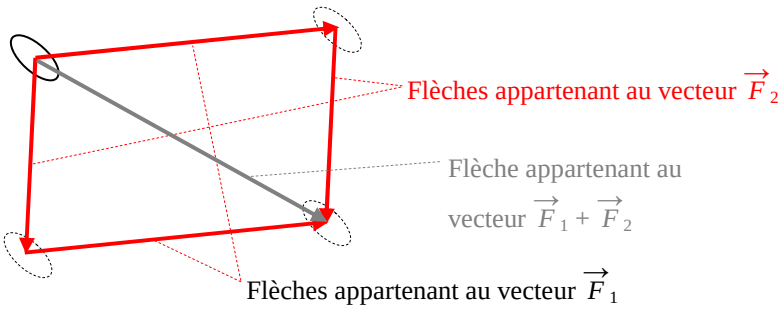


Fig.17c : représentation vectorielle des forces

§18 Forces réciproques et centre de masse

8. On peut répéter ce qui précède à partir de la notion d'accélération moyenne pour définir l'accélération instantanée.
9. $\lim_{h \to 0} \frac{V_x(\tau + h) - V_x(\tau)}{h} = a_x(t)$. On peut reprendre une démonstration analogue en ordonnée et en cote et démontrer les formules $\lim_{h \to 0} \frac{V_y(\tau + h) - V_y(\tau)}{h} = a_y(t)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{V_z(\tau + h) - V_z(\tau)}{h} = a_z(t)$.
10. Les trois valeurs $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ sont les cordonnées d'une flèche du vecteur accélération $\vec{a}(t)$.
11. Vocabulaire : on appelle **système** un ensemble quelconque de corps.
12. L'idée des forces réciproques est née d'un ensemble d'expériences très simples (figure 15a) : un aimant droit A et un barreau en fer B posés à distance et alignés sur une surface horizontale très glissante, un pôle de l'aimant face à un bout du barreau. Une fois lâchés, on voit les deux objets SIMULTANÉMENT S'ACCÉLÉRER (flèches noires) l'un vers l'autre. Les forces responsables sont dites **forces réciproques**.
13. Si les masses sont différentes, on voit l'accélération du plus lourd plus faible que celle du plus léger.
14. En apparence, A exerce à distance sur B une force et B sur A une autre (flèches rouges) de sens opposé.
15. **Hypothèse fondamentale : entre deux corps les forces réciproques sont deux à deux opposées**.
16. Pour chaque partie A d'un système la définition des forces selon Newton (§11) donne $\sum_B {F_A}^B{}_x = m_A\, a_{Ax}$ où a_{Ax} est l'abscisse de l'accélération.
17. Additionnons membre à membre en parcourant toutes les parties A du système :
    $\sum_{\text{A du système}} \sum_{\text{causes B}} {F_A}^B{}_x = \sum_{\text{A du système}} m_A\, a_{Ax.}$
18. Ces forces sont physiquement de deux natures très différentes.
19. **Les forces d'origine interne**, exercées par les parties du système les unes sur les autres sont d'après l'al. 8 deux à deux opposées, donc leur somme est nulle. Il reste donc **les forces d'origine extérieure**. Il reste
    $\sum_{\text{A du système}} \sum_{\text{causes extérieures B}} {F_A}^B{}_x = \sum_{\text{A du système}} m_A\, a_{Ax.}$
    Concrètement, $\sum_{\text{causes extérieures B}} {F_A}^B{}_x$ est la somme des forces subies de l'extérieur par le système $\sum {F_x}^{\text{extérieur}}{}_{\text{système}}$.
20. Mais (§11) à droite on doit avoir $\sum {F_x}^{\text{extérieur}}{}_{\text{système}} = m_{\text{système}}\, a_{\text{x système}}$.
21. Comparons les al. 14 et 15 : $\sum_{\text{A du système}} m_A\, a_{Ax\,=} = m_{\text{système}}\, a_{\text{x système}}$.
22. Par analogie, définissons un **point géométrique** G d'abscisse x_G solution de l'équation
    $\sum_{\text{A du système}} m_A\, x_A = m_{\text{système}}\, x_G$ et nommons-le **centre de masse**.
    Exprimons la vitesse instantanée de G : $m_{\text{système}}\, x_G(\tau + h) = \sum_{\text{A du système}} m_A\, x_A(\tau + h)$ moins
    $m_{\text{système}}\, x_G(\tau) = \sum_{\text{A du système}} m_A\, x_A(\tau)$ donnent $m_{\text{système}} \cdot (x_G(\tau + h) - x_G(\tau)) = \sum_{\text{A du système}} m_A\, (x_A(\tau + h) - x_A(\tau))$.
    Divisons par le temps : $m_{\text{système}} \cdot \frac{x_G(\tau + h) - x_G(\tau)}{h} = \sum_{\text{A du système}} m_A \frac{x_A(\tau + h) - x_A(\tau)}{h}$.
    À la limite quand $h \to$ zéro, $\sum_{\text{A du système}} m_A\, V_{x\,A}(t) = m_{\text{système}}\, V_{xG}(t)$.
23. Une répétition de cette démonstration, où la vitesse joue le rôle de la position et l'accélération celui de la vitesse, donne directement la formule de l'al. 16 à condition d'identifier $a_{\text{x système}}$ et $a_{\text{x G}}$.
24. En cas de chute libre (fig.15b), même si le système tourne sur lui-même, le centre de masse suit exactement le même mouvement que le système quand il tombe en translation. C'est pourquoi la flèche choisie du vecteur poids pour le représenter a habituellement son empennage sur le centre de masse, que pour cette raison est appelé aussi **centre de gravité**.
25. D'après l'al. 14 **on peut calculer la position du centre de masse par blocs** (figure 15c).
    $m_{\text{système}}\, x_G = \sum_{\text{A du bloc 1}} m_A\, x_A \ \ldots + \sum_{\text{A du bloc}N} m_A\, x_{GA} = m_{\text{bloc 1}}\, x_{\text{G1}} \ \ldots + m_{\text{bloc }N}\, x_{GN}$.
26. Un cas particulier est la superposition de tous les centres de masse. Alors $m_{\text{sytème}}\, x_G = (m_{\text{bloc 1}} \ \ldots + m_{\text{bloc }N})\, x_{\text{bloc 1}}$ donc, vu que la masse du système est la somme des masses de ses blocs, $x_G = x_{\text{bloc 1}}$ donc G est confondu avec les centres de masse des blocs. **Si le centre de masse des blocs sont superposés, il le sont sur le centre de masse du système.**

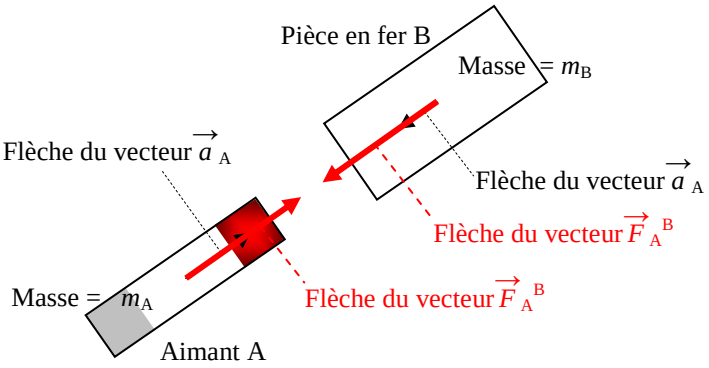


Fig. 18a

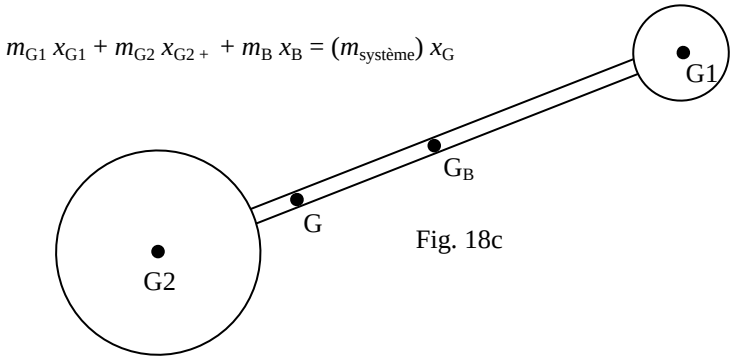


Fig. 18c

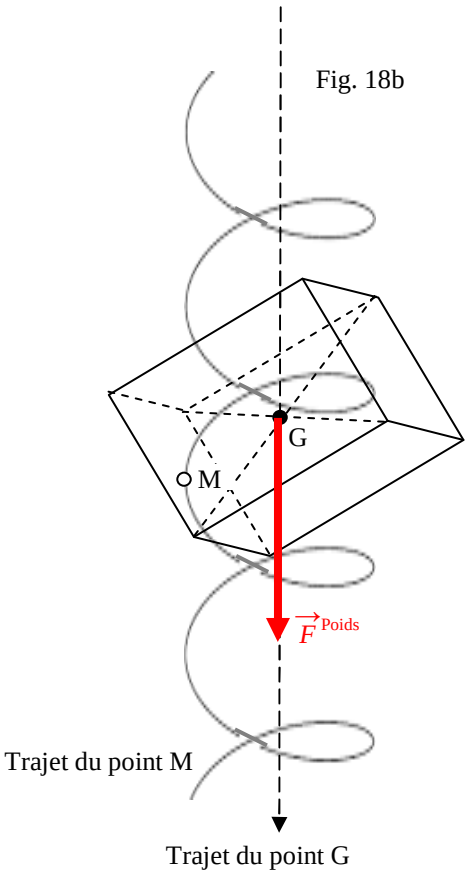


Fig. 18b

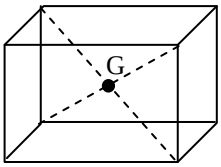


Fig. 18d

Fig. 18e

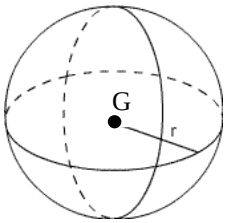


Fig. 18i

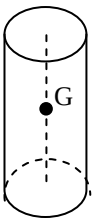


Fig. 18f

Fig. 18g

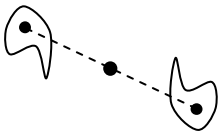
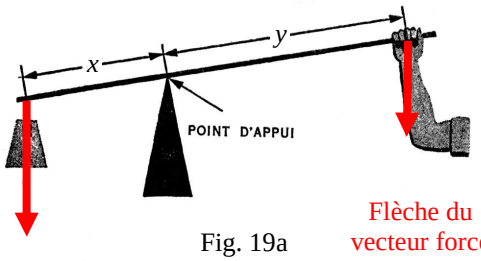


Fig. 18h

27. On divise le système en paires de parties symétriques par rapport au centre de symétrie. Un bloc est donc une paire de parties 1 et 2 (fig. 15h). Le centre de symétrie O a comme coordonnée x_O solution de l'équation
28. $x_O - x_1 = x_2 - x_O$ (il est à même distance des deux parties de la paire).
29. Une addition de x_O et de x_{A1} donne $2\, x_O = x_1 + x_2$.
30. Par définition du centre de masse d'une paire, $m_{paire}\, x_G = m_1\, x_1 + m_2\, x_2$.
31. Mais par symétrie $m_1 = m_2$ et $m_{paire} = m_1 + m_2$ donc $m_{paire} = 2\, m_1$ donc $2\, m_1\, x_G = m_1\, x_1 + m_1\, x_2$ donc $2\, x_G = x_1 + x_2$.
32. Les al. 24 et 26 donnent $x_G = x_O$ parce que ces coordonnées solutions de la même équation.
33. Les centres de masse des paires étant superposées sur O, ce point O est centre de masse du système.
34. **Les corps à symétrie centrale ont le centre de masse et le centre de symétrie confondus** (fig. 15d à 15g).

§19 Leviers et moments de force

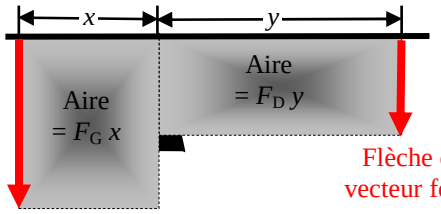
1. L'expérience de la figure 16a est aussi ancienne que l'humanité. Dès que celle-ci savait compter et faire des multiplications, on avait remarqué que cet outil – le levier – permettait de soulever des charges lourdes qu'un humain aurait été incapable de faire.
2. Dès l'invention des balances – qui sont des leviers particuliers – on a constaté l'égalité des multiplications $x\ m_G$ et $y\ m_D$ où m_G et m_D étaient des masses suspendues à gauche et à droite (figure 16c sans les flèches rouges ni les surfaces grises).
3. Dès l'invention du concept de force – qui est un pouvoir d'accélérer les corps (§09) – par Newton, on en a déduit l'égalité des produits $x\ F_G$ et $y\ F_D$ (figure 16c sans les surfaces grises).
4. Or, si la barre est horizontale, ces deux multiplications donnent chacune l'aire d'un rectangle (fig. 16b).
5. La généralisation la plus naturelle est (figure 16c) l'aire des parallélogrammes gris.
6. La comparaison des aires donne $F_G\ x \sin\beta = F_G\ y \sin\alpha$.
7. De plus (figure 16d) on a $\sin\alpha = \sin\beta$. En effet, on a $\alpha + \beta = 180°$ d'où le construction et l'usage de la symétrie dont l'axe est celui des sinus. Cela nous laisse le choix entre les angles intérieurs ou extérieurs aux parallélogrammes de la figure 16c.
8. On retrouve alors le résultat expérimental de l'alinéa 3, à savoir $x\ F_G = y\ F_D$.
9. L'expérience de la figure 16e montre que le choix des aires ci-dessus a été un bon choix. En effet, même si les angles α et β sont différents, et en tenant compte des incertitudes des mesures, il n'y a pas eu de contradiction expérimentale.
10. Usage de l'algèbre : avec le cercle trigonométrique de la figure 16e, on définit un sens positif des angles. Ensuite, dans la formulation on convient de l'ordre dans lequel interviennent la force et le segment de droite entre le point d'appui et le point d'application de la force. Enfin, ce segment de droite doit être orienté.
11. Ainsi, α est compté positivement et β négativement et les segments orientés choisis sont les flèches (O , D) et (O , G) qui appartiennent respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OG}$.
12. On écrit alors les moments $M_G = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}_G$ et $M_D = \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{F}_D$. Comme ils sont algébriquement opposés, on peut écrire $\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}_G + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{F}_D = 0$. C'est la **loi d'équilibre des moments de force**.
13. L'intervention du sinus est pratique parce que il est du même signe que l'angle (figure 16d).
14. Cette modélisation peut s'appliquer à toutes les sortes de leviers soumis à deux forces ou plus.
15. Sur la figure 16f, les aires des trois quadrilatères OMAB, OMCD et OPFE sont égales (§37) tout comme les longueurs des flèches de même orientation (A , B), (C , D) et (E , F), donc ces trois flèches appartiennent au même vecteur (§38), donc représentent la même force. Les trois moments de la force représentée par ces flèches sont égaux. On parle parfois de **vecteurs glissants**, mais cette expression n'est pas partout adoptée.
16. Appliqué à la figure 16e, les flèches (O , G) et (G , H) d'une part et (O , D) et (D , E) d'autre part sont identiques donc appartiennent au même vecteur, soit respectivement $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DE}$. On peut donc écrire $M_G = \overrightarrow{GH} \wedge \overrightarrow{F}_G$ et $M_D = \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{F}_D$. Dans la pratique, pour le choix des angles de l'alinéa 7, on a adopté les angles extérieurs aux parallélogrammes.



Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_G$

Fig. 19a

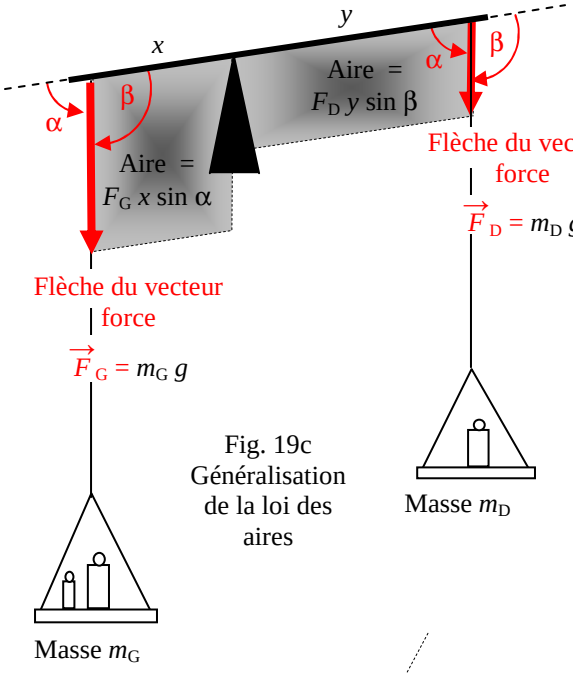
Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_D$



Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_G$

Fig. 19b

Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_D$



Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_G = m_G\, g$

Masse m_G

Flèche du vecteur force $\overrightarrow{F}_D = m_D\, g$

Masse m_D

Fig. 19c
Généralisation de la loi des aires

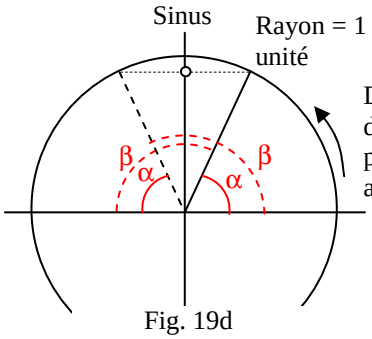


Fig. 19d
Démonstration que sin α = sin β

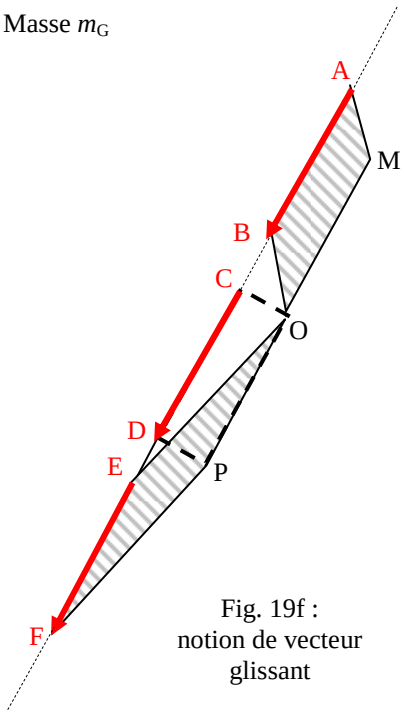
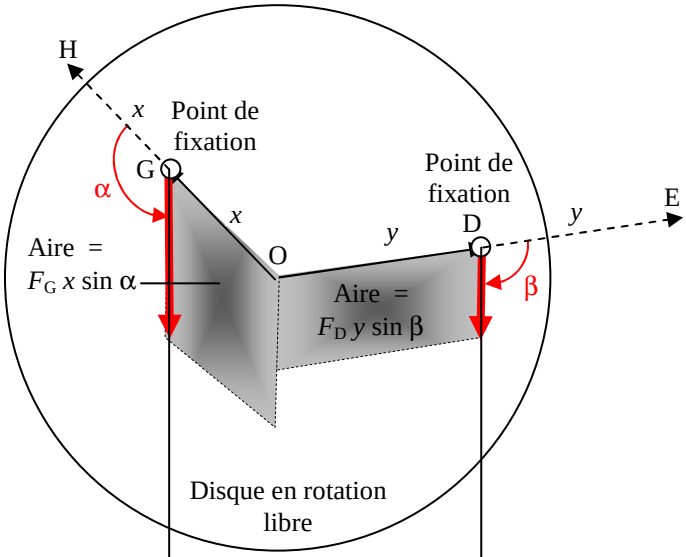


Fig. 19f : notion de vecteur glissant



Masse m_G

Masse m_D

Fig. 19e
La loi des aires n'est pas contredite.

§20 Usages théoriques des moments

L'expérience de Cavendish

1. Sur la figure 17a, A est une masse sphérique de plomb, B en est une autre et C équilibre la barre T de sorte que le système S composé de A, T et B reste stable et horizontal.
2. Le premier objectif de l'expérience est de savoir si la loi de newton $F^{A}{}_{S} = G \frac{m_A m_C}{R^2}$ est ou n'est pas fausse.
3. Le deuxième objectif est, connaissant R, $F^{A}{}_{S}$ et les masses, d'estimer numériquement la constante de gravitation G de la loi précédente.
4. Le fil tordu a tendance à accélérer la rotation de S dans le sens D. L'attraction de B par A a tendance à accélérer la rotation de S dans le sens E.
5. Quand S est immobilisé, les moments $\mathcal{M}^{fil}{}_{S}$ dit **moment de torsion** et $\mathcal{M}^{A}{}_{S}$ sont opposés. Pour le premier il faut que l'empennage de la flèche de $\overrightarrow{F}^{fil}{}_{S}$ soit exactement sur le contact entre le fil et la barre T et alors la distance à l'axe de rotation apparaîtrait nulle donc intuitivement le moment $\mathcal{M}^{fil}{}_{S}$ serait nul, ce qui est contredit par l'expérience.
6. Le poids $\overrightarrow{F}^{poids}{}_{S}$ n'accélère pas S en rotation. Son moment $\mathcal{M}^{poids}{}_{S}$ est donc sensé être nul.
7. Par contre l'empennage de la flèche de $\overrightarrow{F}^{A}{}_{S}$ est facile à situer. Connaissant $|\mathcal{M}^{fil}{}_{S}|$ (la valeur absolue de $\mathcal{M}^{fil}{}_{S}$) et r, l'expérience permet la mesure $F^{A}{}_{S}$: l'égalité des moments non nuls donne $|\mathcal{M}^{fil}{}_{S}| = r\, F^{A}{}_{S}$ et une division des deux membres par r donne $|\mathcal{M}^{fil}{}_{S}| / r = F^{A}{}_{S}$.
8. Une multiplication par $m_A\, m_C / R^2$ des deux membres de la formule de Newton (al. 2) donne un moyen de chiffrer la constante universelle de gravitation $G = \frac{F^{A}{}_{S}\, R^2}{m_A\, m_C}$.
9. Hooke, un contemporain de Newton, a étudié de quoi dépend le moment de torsion $\mathcal{M}^{fil}{}_{A}$. Il a expérimentalement établi la loi $\mathcal{M}^{fil}{}_{A} = K\, \theta$ où θ est l'angle de torsion entre la position de l'altère et sa position au repos et K une constante. Il a démontré aussi la formule $K = C \frac{d^4}{L}$ où d est le diamètre du fil et L sa longueur. Le coefficient C est nommé **module élastique de torsion**.
10. À partir de la masse volumique d'une roche commune et du rayon de la Terre, Hooke estima sa masse à $m_{Terre} = 6 \times 10^{24}$ kg.
11. À partir de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}81$ m s^{-2} et de l'identification de la force d'attraction par la terre avec le poids des corps $G \frac{m_A\, m_{Terre}}{R_{Terre}^2} = m_A\, g$, il obtient une prévision de G autour de 10^{-11} m^3 kg s^{-2}, ce qui lui a permis (al. 20 et 21) un bon choix du fil de torsion. Son résultat expérimental a été $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3 kg s^{-2}.

La boussole

12. Sur la figure 17b il est impossible de choisir sur les deux parties nord et sud de l'aiguille l'empennage des forces représentées par $\overrightarrow{F}^{champ}{}_{A\ nord}$ et $\overrightarrow{F}^{champ}{}_{Asud}$. Suspendue sur un fil en torsion l'aiguille est soumise à deux moments $\mathcal{M}^{fil}{}_{A}$ opposé à $\mathcal{M}^{champ}{}_{A} = \mathcal{M}^{champ}{}_{A\ nord} + \mathcal{M}^{champ}{}_{A\ sud}$, ces deux derniers étant supposés égaux.
13. Sur la figure 17d est montrée l'analyse des forces sur une poulie ou un tambour de treuil. Le cercle trigonométrique définit le sens positif des rotations. En M est soit un axe de rotation libre (définition : $\mathcal{M}^{axe}{}_{P}$ est nul), soit frottant (le moment de l'axe s'oppose à la rotation) soit lié mécaniquement à un moteur (le moment accélère la rotation). D'après l'al. 9 on a $\overrightarrow{F}^{B}{}_{fil\ 1} = \overrightarrow{F}^{fil\ 1}{}_{P}$ et $\overrightarrow{F}^{B}{}_{fil\ 2} = \overrightarrow{F}^{fil\ 1}{}_{P}$.
14. Un cas particulier est la rotation libre sur l'axe et l'immobilisation d'une poulie. On a alors algébriquement $\mathcal{M}^{fil\ 1}{}_{P} + \mathcal{M}^{fil\ 2}{}_{P} = 0$ donc $R\, F^{fil\ 1}{}_{P} - R\, F^{fil\ 2}{}_{P} = 0$ donc $F^{fil\ 1}{}_{P} = F^{fil\ 2}{}_{P}$: **en statique une poulie en rotation libre change l'orientation d'une force sans changer son intensité mécanique**.

Les poulies

15. Sur la fig. 17d, les deux aires sont manifestement différentes, donc la poulie ou le tambour accélèrent en rotation. à l'équilibre, il faut qu'elles soient égales, donc que les deux forces de traction du fil soient égales en intensité.

La poussée d'Archimède

16. La poussée d'Archimède a un moment (figure 17c). Le système est le bateau et son contenu. La poussée joue le rôle du fil de la fig. 17d. A gauche le bateau est stable et à droite on dit qu'il a du gîte : il pivote à cause du moment de la poussée et se redresse.

La localisation du centre de masse

17. Le moment du poids est nul quand l'objet suspendu de la fig. 17e, donc G est sur la droite qui sert d'axe du fil. Deux acccrochages en des point différents localisent G à l'intersection.

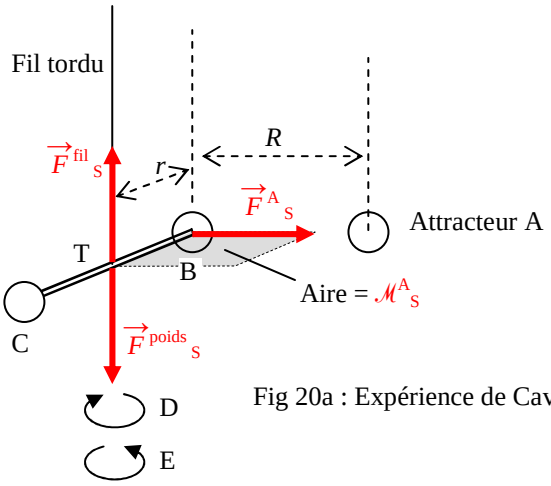


Fig 20a : Expérience de Cavendish

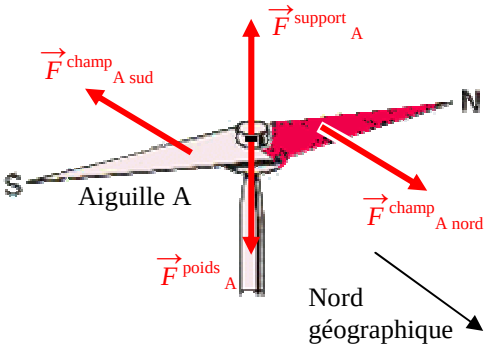


Fig 20b
Boussole

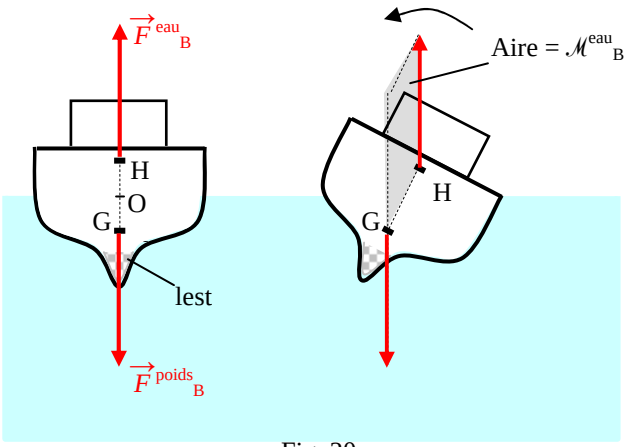


Fig. 20c
Moment de la poussée d'Archimède

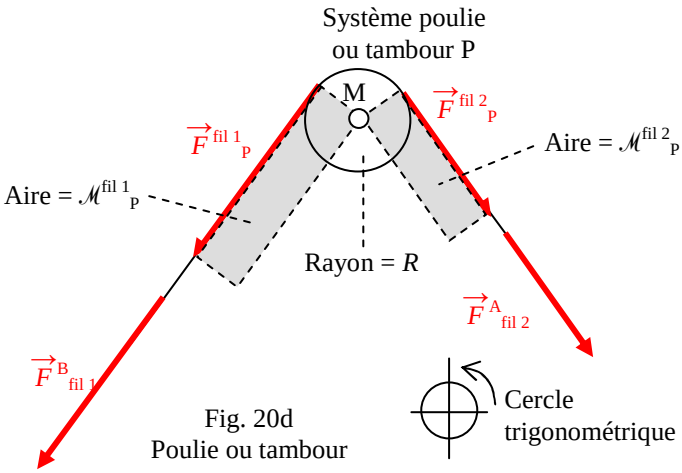
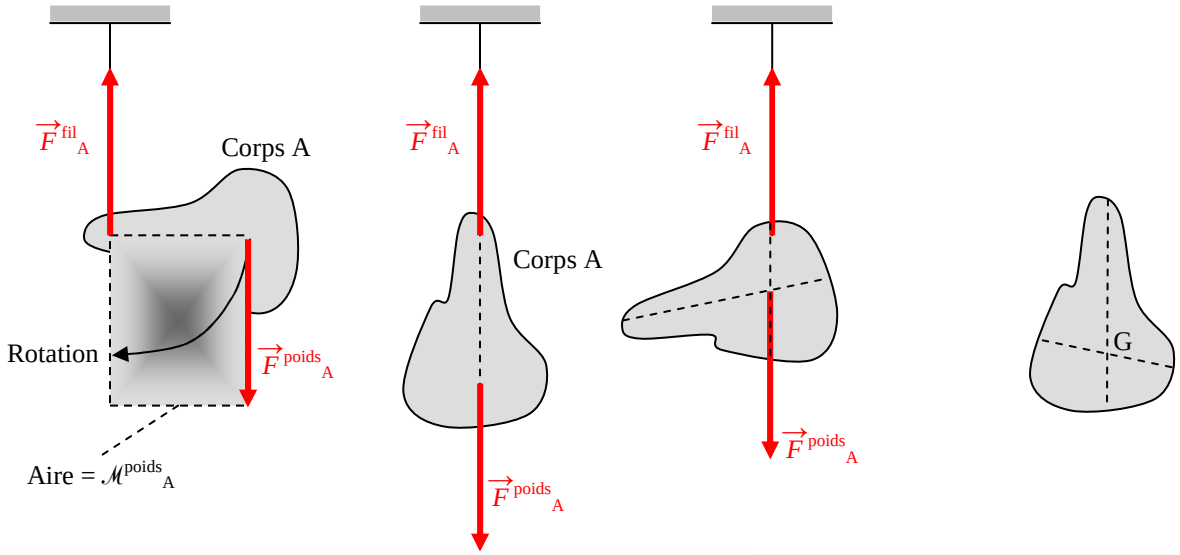


Fig. 20d
Poulie ou tambour



Si l'on suspend un objet à un fil, son centre de gravité est toujours situé à la verticale du point de suspension (cette droite est appelée ligne directrice). Si on suspend un objet à divers points, le centre de gravité est donc situé à l'intersection des lignes directrices.

Fig. 20e
Localiser un centre de masse

§21 Problème de forces

18. Si un corps A exerce sur un corps B une force représentée par le vecteur $\overrightarrow{F}^{A}_{B}$ alors B exerce sur A une **force** dite **réciproque** représentée par le vecteur $\overrightarrow{F}^{B}_{A}$ opposé au précédent : $\overrightarrow{F}^{A}_{B} + \overrightarrow{F}^{B}_{A} = \overrightarrow{0}$. Ici, $\overrightarrow{0}$ est le vecteur dont toutes les flèches sont de longueur nulle.
19. Un inventaire des forces change selon l'ensemble de corps sur lequel elles agissent et qu'on va appeler "le système". C'est importent, parce qu'il faut séparer les forces exercées par les corps hors du système (forces extérieures) des forces exercées par les corps du système les uns sur les autres (forces intérieures), et qui sont deux à deux opposées.
20. Après on fait l'inventaire en se posant deux questions :
à quoi touche le système ? et
qu'est-ce qui agit sur lui à distance ?
21. Après l'inventaire des forces, on représente chacune d'elles par un ensemble de flèches parallèles, de même sens et de même longueur (§38) qu'on appelle **vecteur**.

Les forces de contact

22. Tout contact est générateur d'une **force de contact**. Par exemple (fig. 18a) le vecteur $\overrightarrow{F}^{A}_{P}$ représente la force exercée par la masse A sur le plateau P.
23. Pour représenter une force de contact sur une figure, le plus souvent on choisit l'empennage de la flèche dans la zone de contact (fig. 18c).
24. Souvent on préfère mettre l'empennage ailleurs – parfois hors du système – pour rendre mieux lisible la figure (figure 18f).
25. Pour la même raison, quelques fois c'est la pointe de la flèche force qui est mise dans la zone de contact (fig. 18d).
26. En particulier tous les corps sont en contact avec l'air. On le sait parce qu'un courant d'air est capable de faire bouger un des corps R, P et A, c'est-à-dire de les accélérer. Mais même sans courant, l'air exerce une force de contact non nulle en vertu de la **loi d'Archimède** (§19). Très souvent on résonne comme si ces forces étaient négligeables.

Les forces à distance

27. En général l'empennage d'une flèche représentant une force à distance est choisi sur un ppint de l'espace occupé par le système (fig. 18d), mais pas toujours dedans.
28. Si cette force est le poids du système, la flèche est verticale vers le bas et son empennage est sur le centre de masse (fig. 18d).

Résolution d'un problème de forces

29. Pour résoudre un problème de forces, deux logiques sont disponibles,
30. celle des *forces équilibrés* et
31. celle des *forces réciproques*.
32. Sur la fig. 18a, si on néglige la force de contact avec l'air, les vecteurs $\overrightarrow{F}^{R}_{P\text{ et }A}$ et $\overrightarrow{F}^{poids}_{P\text{ et }A}$ sont, opposés parce qu'ils représentent les forces équilibrées exercées sur un même système.
33. Sur la fig. 18a, les vecteurs $\overrightarrow{F}^{P}_{A}$ et $\overrightarrow{F}^{A}_{P}$ sont opposés parce qu'ils représentent deux forces réciproques.
34. Les deux forces $\overrightarrow{F}^{R}_{P}$ et $\overrightarrow{F}^{R}_{P\text{ et }A}$ sont confondues parce que toutes deux désignent la même force de contact. Les deux écritures diffèrent parce qu'on change de point de vue sur un même dispositif expérimental plongé dans un même environnement physique : pour le premier le système étudié est le seul plateau P alors que pour l'autre le système est l'ensemble plateau P plus masse A.
35. La figure 18e montre une série de forces deux à deux opposées :

soit comme équilibrant un système comme $\overrightarrow{F}^{fil}_{A}$ et $\overrightarrow{F}^{poids}_{A}$ ou $\overrightarrow{F}^{A}_{fil}$ et $\overrightarrow{F}^{B}_{fil}$ si le poids du fil est négligeable,

soit comme étant réciproques comme $\overrightarrow{F}^{fil}_{A}$ et $\overrightarrow{F}^{A}_{fil}$, ou et $\overrightarrow{F}^{B}_{fil}$ et $\overrightarrow{F}^{fil}_{B}$.

En conclusion, on démontre que $\overrightarrow{F}^{fil}_{B} = \overrightarrow{F}^{poids}_{A}$.
Tous ces faits permettent de tracer un polygone des forces (§11).

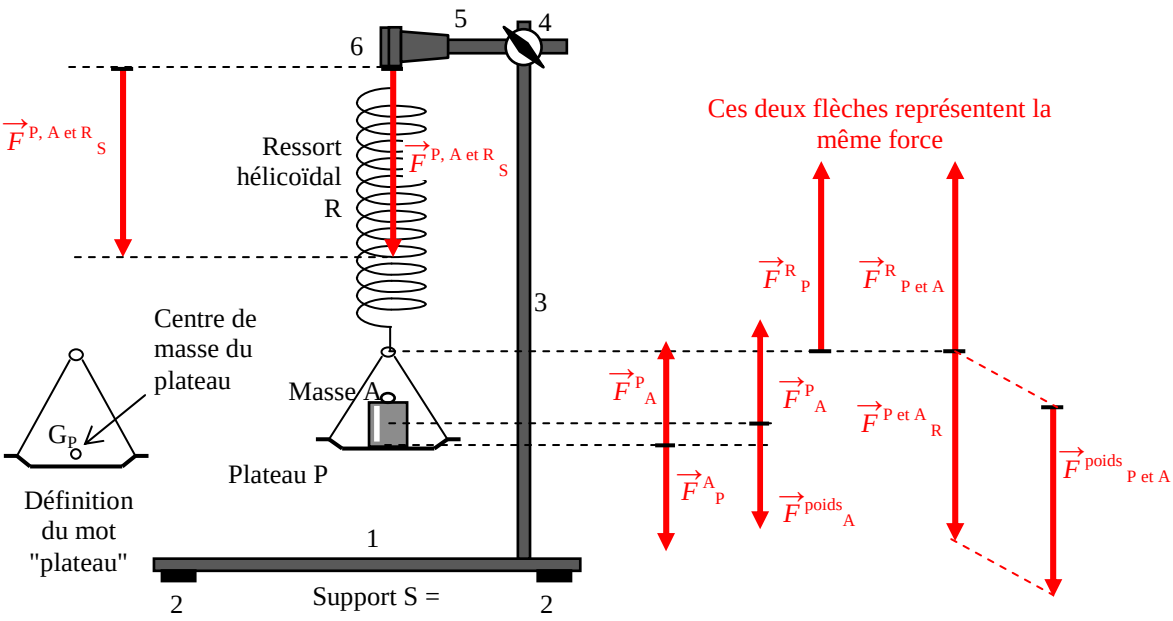


Fig. 21a

Fig 21b
Une flèche représentant une force

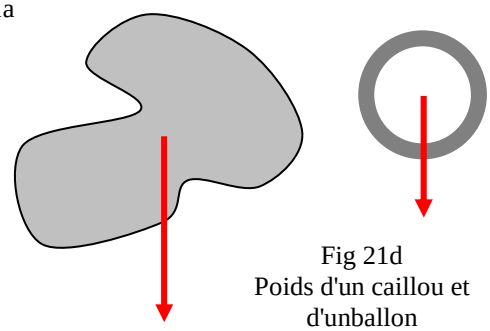


Fig 21d
Poids d'un caillou et d'unballon

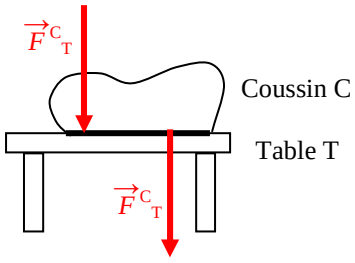


Fig 21c
Choix d'une flèche représentant une force de contact

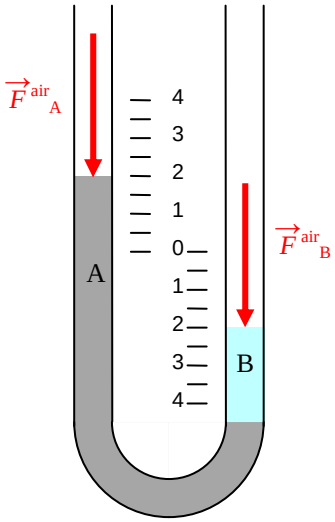


Fig. 21d

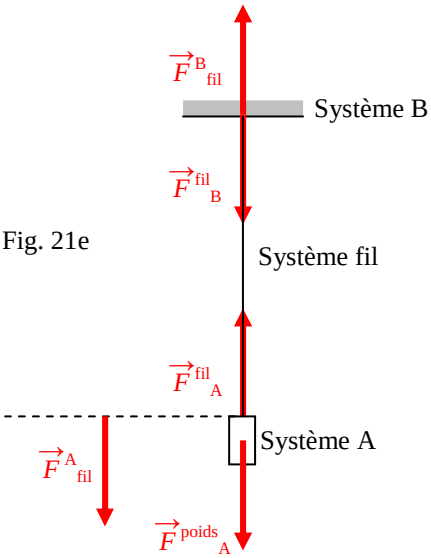


Fig. 21e

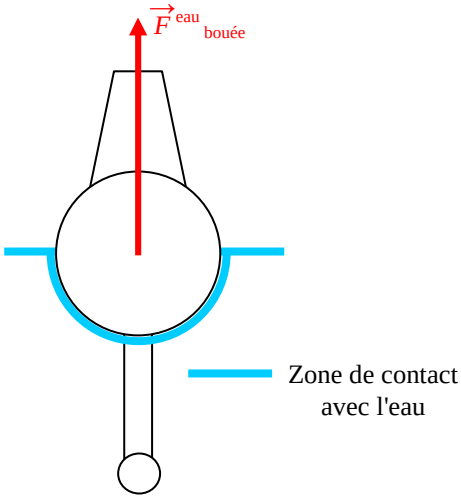


Fig. 21f (bouée)

§22 Poussée d'Archimède & poulies

1. Un cas historique est la découverte de la **poussée d'Archimède** (fig. 19a) : en pensée, le célèbre savant grec (tué en 212 av. J.C par un soldat romain) fit une expérience.
2. Sur la figure de gauche, le liquide est au repos. La zone délimitée en tirets est une partie du liquide isolé en pensée : elle subit deux forces opposées : son poids $\overrightarrow{F}^{\text{poids}}_{\text{A}}$ et le contact avec le liquide environnant $\overrightarrow{F}^{\text{E}}_{\text{A}}$. Comme le liquide est immobile ces deux forces sont opposées.
3. Si on remplace exactement A par un corps B de même forme et de même volume, le poids de B en général est différent de celui de A mais aucune raison n'oblige à admettre un changement de la force de contact : $\overrightarrow{F}^{\text{E}}_{\text{B}} = \overrightarrow{F}^{\text{E}}_{\text{A}}$.
4. L'immersion de B déplace un volume de liquide égal au volume de A.
5. En conclusion **tout corps plongé dans un fluide subit de sa part une poussée verticale vers le haut et numériquement égale au poids du liquide déplacé**.
6. Cette démonstration est valable pour un corps dans un gaz.
7. Note : Dans l'al. 3, on applique un principe fondamental de la démarche scientifique : entre plusieurs hypothèses possibles, on s'en tient à la plus simple jusqu'à un éventuel fait nouveau contradictoire (principe du rasoir d'Occam). Ici, si on ne trouve pas de raison contre l'hypothèse envisagée on fait comme il n'en existe pas.
8. Le roi de Syracuse Hiéron II (306-214) se fait faire une couronne en or en fournissant la quantité d'or nécessaire. L'orfèvre lui présente la couronne ainsi réalisée.
   Mais le roi a un doute et voudrait savoir si l'orfèvre a bien utilisé tout l'or; s'il n'en a pas escamoté une partie.
   La pesée montre que la couronne a bien le même poids que l'or fourni au départ.
   Mais est-ce suffisant ? Le roi confie le problème à Archimède (figure 19f).
9. On mène une expérience témoin (fig. 19b) montrant le comportement de la balance quand on plonge deux objets identiques en même temps dans le même liquide. On sait que les deux poids sont identiques et les deux poussées d'Archimède aussi. On en conclut que la balance est juste.
10. Dans l'expérience de démonstration (fig. 19c), en haut, on démontre que les poids des pièces témoin en or est égale à la masse de la couronne. On en déduit (tableau 19a) l'égalité $\mu_{\text{témoins}}\, V_{\text{témoins}} = \mu_{\text{couronne}}\, V_{\text{couronne}}$.
11. En bas, on a démontré que la poussée d'Archimède sur les pièces d'or témoins et sur la couronne sont identiques.
12. La loi d'Archimède dit alors que le poids de liquide déplacé par la couronne ou par les pièces témoin sont identiques, donc que leur volume est identique.
13. D'après l'al. 10, on en déduit que les deux masses volumiques sont identiques, donc que l'or de la couronne est pur.

Les poulies

14. Dès l'invention de la roue, l'humanité a découvert la propriété fondamentale des poulies : elles changent l'orientation des forces sans changer leur intensité.
15. Toutes fois, en cas de rotation gênée par des frottements, on n'a pas cette propriété.
16. En cas de frottements négligeables, cela se vérifie facilement avec un dynamomètre : quelle que soit l'orientation du fil entre cet appareil de mesure et la poulie son indication ne change pas (fig. 19d).
17. De plus, l'expérience montre que l'indication du dynamomètre est la même en l'absence de poulie (fig. 19e).
18. Cela élargit le domaine expérimental en dynamique : dans les montages, on peut changer à volonté l'orientation des forces mises en oeuvre. Dans les figures 19d et e toutes les flèches rouges ont la même longueur.

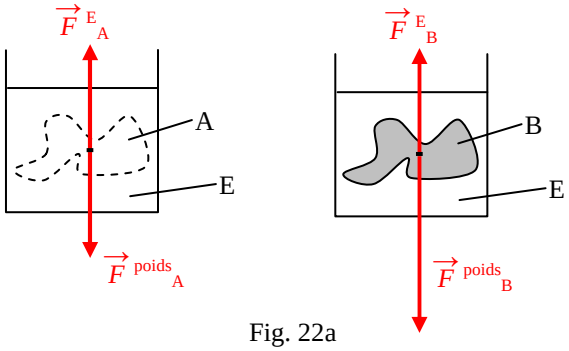


Fig. 22a
Invention de la poussée d'Archimède

Proportion	
Volume	Masse
V	*m*
1	μ

Tableau 22a
Définition de la masse volumique μ

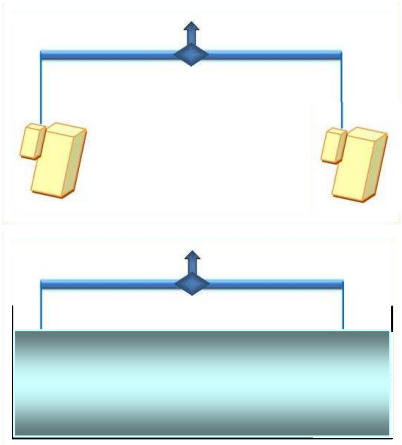


Fig. 22b
Expérience témoin

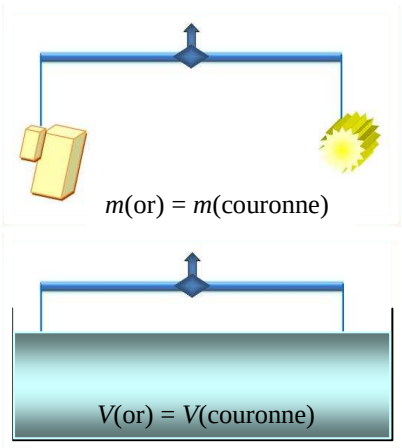


Fig. 22c
Le problème de la couronne

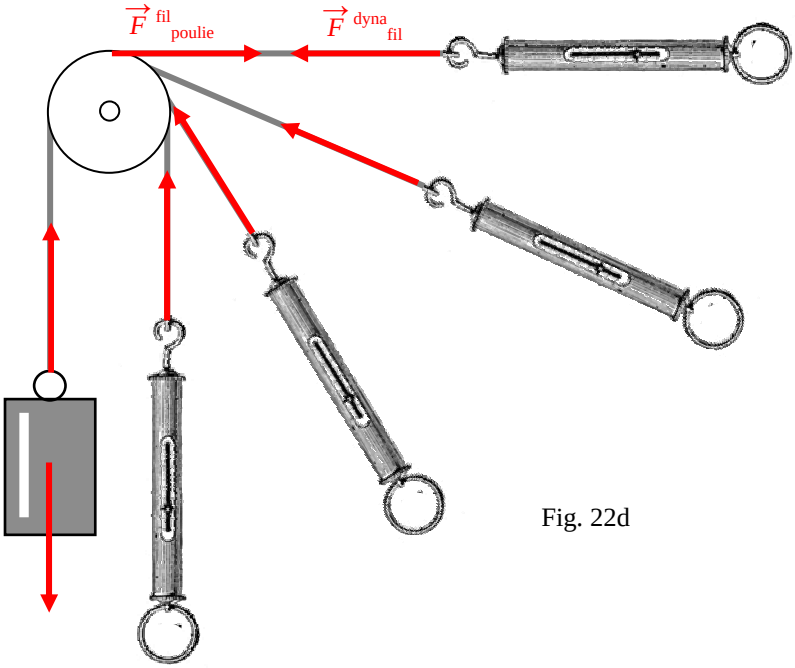


Fig. 22d

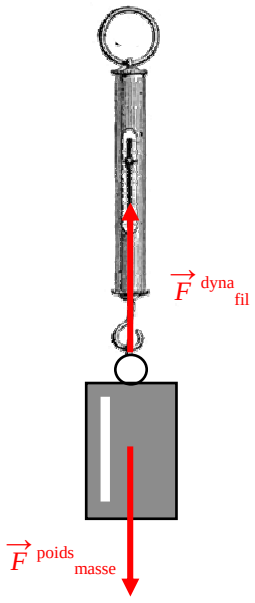


Fig. 22e

§23 Notion de champ

36. Le poids d'un système est une force, c'est-à-dire un pouvoir d'accélérer les corps qui existe dans l'espace indépendamment de la présence de matière dans cet espace.
37. Au XIXe siècle, en Europe deux écoles de physiciens s'opposaient sur ce sujet.
38. En Angleterre, on pensait qu'une telle force était en fait une force de contact entre le système et un **fluide subtil** (de masse volumique nulle) remplissant l'espace.
39. Dans les pays de culture germaniques comme l'Allemagne ou dans les pays scandinaves on pensait que c'était l'espace lui-même qui a ce pouvoir d'accélérer les corps.
40. Faraday importa cette idée en Grande Bretagne quand, jeune homme il vit pour la première fois l'expérience d'Oersted en 1819 (fig. 20b): un fil conduisant de l'électricité change l'orientation d'une boussole située dans son environnement sans aucun contact avec elle, comme si le courant change l'espace autour de lui et que ce changement induit agit ensuite sur l'aiguille.
41. Après la ravitation, deux autres espèces de force ont été mises en évidence.
42. Sans contact entre elles, deux corps électriquement chargés s'attirent ou se repoussent selon le signe des charges (fig. 20c).
43. Toujours sans contact, deux bouts de barreaux aimantés ont le même comportement (fig. 20d).
44. L'idée du fluide subtil avait été mise à mal quand on refit ces expériences dans un espace sous cloche après en avoir extrait l'air.
45. Maxwell en 1861 nomma **champ** une partie de l'espace où existe un pouvoir d'accélérer les corps. D'après les expériences, il en existe trois : le **champ gravitationnel** (qui accélère proportionnellement à la masse), le **champ électrique** (qui accélère proportionnellement à la charge électrique) et le **champ magnétique** (qui accélère un pôle d'aimant).
46. La boussole d'Oersted met en évidence une association du champ électriques et du champ magnétique donnant le **champ électro-magnétique**.
47. Le champ gravitationnel est toujours dans le voisinage d'une masse. Newton avait postulé que la pesanteur est le champ gravitationnel de la terre.
48. Il avait postulé que toute masse donne à l'espace qui l'environne un champ de gravitation.
49. En conséquence le poids d'un corps est le résultant des champs de gravitation non seulement de la terre, mais de tous les corps présents dans son environnement.
50. Mais l'estimation chiffrée de la masse de la Terre démontre que son pouvoir d'accélérer les corps est de très loin supérieur à ceux des autres corps, au point qu'on puisse les négliger dans les calculs.
51. Le volume de la Terre est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$ où R est le rayon. On a donc $3\,V = 4\,\pi\,R^3$.
52. Le tableau 20a rappelle la définition de la masse volumique μ. Une estimation consiste à peser et mesurer le volume d'une roche très répandue. Celle du granite est 2,7 kg par dm^3 soit 2700 kg par m^3.
53. Le périmètre de la Terre est $P = 2\,\pi\,R$ donc son cube est $P^3 = 8\,\pi^3\,R^3$. Une division membre à membre avec l'al. 16 donne $\frac{3\,V}{P^3} = \frac{1}{2\,\pi^2}$. Une multiplication par $\frac{P^3}{3}$ donne $V = \frac{P^3}{6\,\pi^2}$.
54. La masse de la Terre d'après le tableau 20a est $M = \mu\,\frac{P^3}{6\,\pi^2}$.
55. Numériquement $M = \frac{2700\ \mathbf{kg\ m^{-3}}\ (40\,000\,000\ \mathbf{m})^3}{6 \times 3{,}14^2} = 29{,}2 \times 10^{23}\ \mathbf{kg} = 2{,}92 \times 10^{24}\ \mathbf{kg}$. Les corps courants ont des masses allant de quelques 0.001 **kg** à quelques tonnes (quelques 1000 **kg**).
56. Dans le §XX a été proposée par Newton une loi de gravitation universelle : le poids des corps n'est qu'un cas particulier du fait que tous les corps s'attirent à distance par une force centripète (orientée vers le centre) inversement proportionnelle au carré de la distance au centre et proportionnelle aux masses du corps attiré et du corps attracteur : $F = \frac{G\,m\,M}{r^2}$.
57. Le poids d'un corps de masse m est $F = m\,g$ où g est l'accélération des chutes libres (§03) $\boxed{g = 9{,}81\ \mathbf{m\ s^{-2}}}$.
58. On a donc $\frac{G\,m\,M}{r^2} = m\,g$ donc $\frac{G\,M}{r^2} = g$ et une multiplication des deux membres par $\frac{r^2}{M}$ donne $G = \frac{r^2\,g}{M}$.
59. Numériquement la constante G est estimée à $\frac{(6371\,000\ \mathbf{m})^2 \times 9{,}81\ \mathbf{m\ s^{-2}}}{2{,}92 \times 10^{24}\ \mathbf{kg}} = 1{,}36364513 \times 10^{-10}\ \mathbf{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$.
60. L'expérience de Cavendish a démontré que G est proche de $6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathbf{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$.

Proportion	
Volume	Masse
V	*M*
1	μ

Tableau 23a

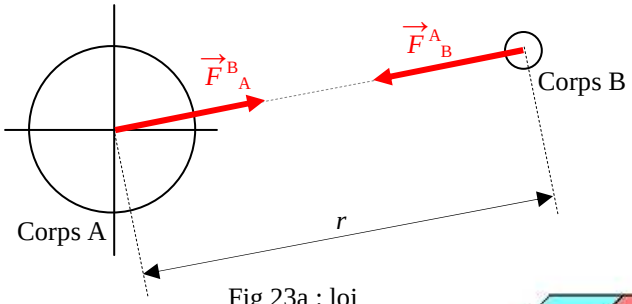


Fig 23a : loi d'attraction unverselle de Newton

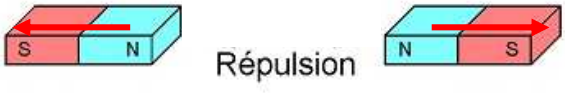
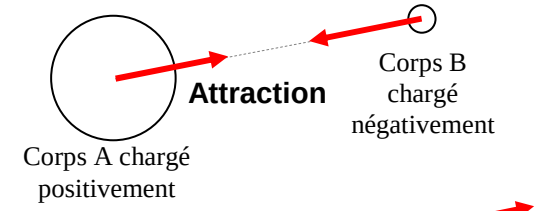
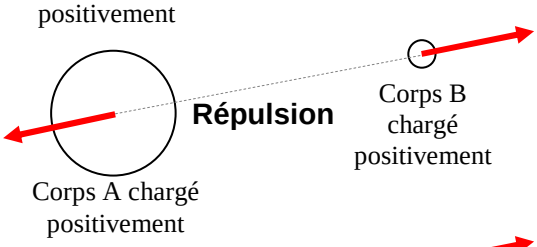


Fig 23d : Champ magnétique





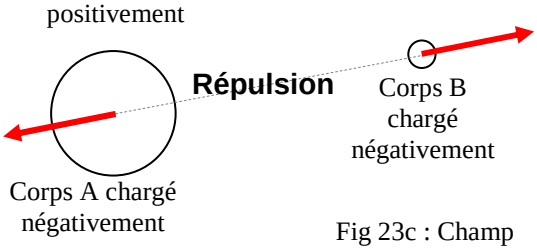


Fig 23c : Champ électrique

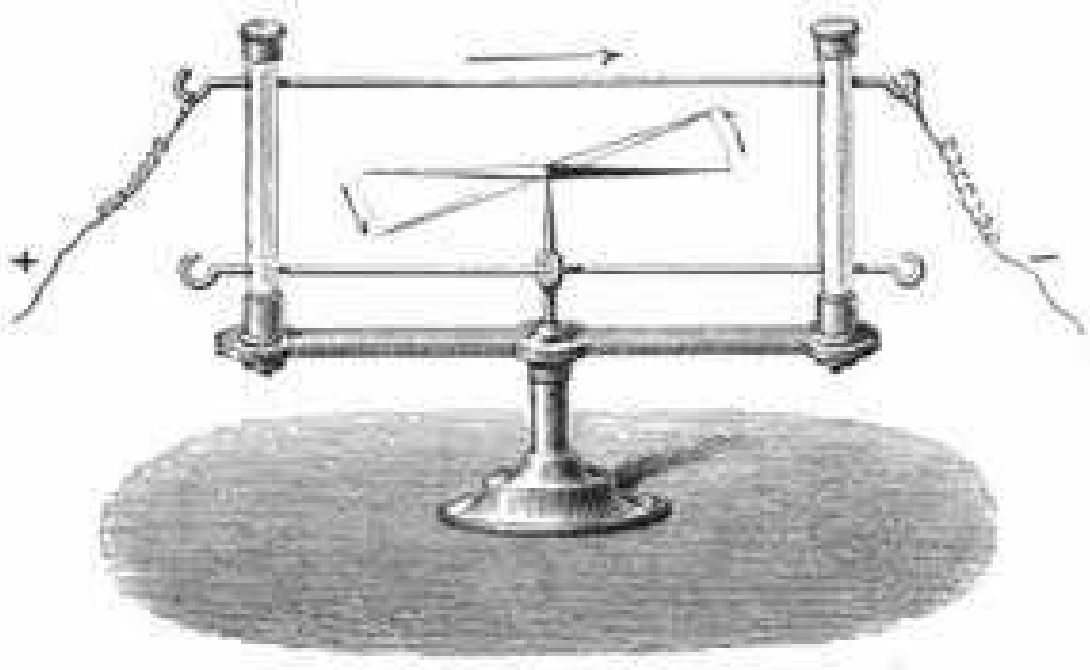


Fig. 23b : expérience d'Oersted

2 Énergie

§24 Un théorème de Newton sans intérêt physique apparent

En une dimension

1. Newton, uniquement par curiosité, explora ce que peut donner comme nouveaux théorèmes de mathématiques la multiplication de la force par la distance parcourue. Il n'y voyait là aucun intérêt en physique.
2. Raisonnons d'abord le long d'une droite parce que c'est mathématiquement plus simple**.**

   Si la vitesse initiale n'est pas nulle, cela donne $\boxed{F_x\,(x-x_o)=\frac{1}{2}\,m\,v_x{}^2-\frac{1}{2}\,m\,v_{xo}{}^2}$.
3. Grâce à ce résultat, il est possible de prévoir quelle vitesse aura un corps connaissant sa vitesse initiale, sa masse et la force subie sans être obligé de connaître son accélération (voir démonstration page ci-contre).

   La multiplication de la force par le déplacement donne la variation de la quantité $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ où v **est la vitesse du corps**.

En trois dimensions

4. En cas de diversité de l'orientation d'une force dans l'espace, Newton nous avait appris à la décomposer en autant de forces que d'axes du repère de l'espace (§icici), à tenir le raisonnement précédent pour chacune des coordonnées puis à cumuler les résultats ce qui donne

   $F_x\,(x-x_o)+F_y\,(y-y_o)+F_z\,(z-z_o)=\frac{1}{2}\,m\,v_x{}^2-\frac{1}{2}\,m\,v_{xo}{}^2+\frac{1}{2}\,m\,v_y{}^2-\frac{1}{2}\,m\,v_{yo}{}^2+\frac{1}{2}\,m\,v_z{}^2-\frac{1}{2}\,m\,v_{zo}{}^2$. Un arrangement et une factorisation donnent $F_x\,(x-x_o)+F_y\,(y-y_o)+F_z\,(z-z_o)=\frac{1}{2}\,m\,(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)-\frac{1}{2}\,m\,(v_{xo}{}^2+v_{yo}{}^2+v_{zo}{}^2)$.
5. Les quantités entre parenthèse sont respectivement les carrés de la longueur v et v_o de la flèche vitesse (paragraphe 5) d'où la conclusion $\boxed{F_x\,(x-x_o)+F_y\,(y-y_o)+F_z\,(z-z_o)=\frac{1}{2}\,m\,v^2-\frac{1}{2}\,m\,v_o{}^2}$ **.**
6. Le membre de gauche de cette formule s'appelle en mathématiques un **produit scalaire** (paragraphe 26).
7. **Remarque historique** : le premier à nommer cette quantité fut un *physiocrate*, un des philosophes économistes français qui cherchait à quantifier les efforts et la fatigue des ouvriers et lui donna le nom de **travail**.
8. Newton, c'était le XVIIe siècle. Le suivant, le XVIIIe fut celui du début en Grande Bretagne de la **Révolution industrielle**. Les techniciens et ingénieurs avaient constaté la proportionnalité entre le travail de certaines forces et la consommation de charbon ou de bois dans les machines à vapeur. Parmi eux, James **Watt** et James Prescott **Joule** (paragraphe 19). Traditionnellement, on désigne le travail par la lettre W (de l'anglais *work*). Quant aux termes $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ ou $\frac{1}{2}\,m\,v_o{}^2$, d'après le grec *ergos* = mouvement, on les appelle **énergies**.
9. Plus tard, on accola l'adjectif **cinétique** à ce mot.
10. **Remarque algébrique** : si le corps rebrousse chemin, les variations de coordonnées $x-x_o$, $y-y_o$ et $z-z_o$ changent de signe alors que les coordonnées de la force F_x, F_y et F_z gardent le leur, donc le travail change de signe. **Il existe des travaux positifs et des travaux négatifs**.
11. En cas de plusieurs forces subies en même temps, Newton écrivait que *chacune agissait comme si les autres n'intervenaient pas* (paragraphe 8), autrement dit chaque force apporte sa propre variation de l'énergie cinétique. On conclut donc ceci.

    La somme des travaux des forces subies est égale à la variation de l'énergie cinétique.
12. Cette notion de travail et d'énergie vont connaître une importance historique, scientifique et technologique très grande.

Démonstration de la formule de l'al. 2

13. D'une part la définition de newton de la force est $F_x = m\, a_x$.
14. D'autre part l'accélération est la solution a_x de l'équation $v_x - v_{xo} = a\, t$.
15. Enfin, pour les mouvements uniformément accélérés on sait que $x - x_o = \frac{1}{2}(v_x + v_{xo})\, t$.
16. La multiplication de la force F_x par le déplacement $x - x_o$ donne $F_x\,(x - x_o) = m\, a_x \frac{1}{2}(v_x + v_{xo})\, t$.
17. La substitution de $a_x\, t$ donne $F_x\,(x - x_o) = m\,(v_x - v_{xo}) \frac{1}{2}(v_x + v_{xo})$.
18. Une identité remarquable donne $F_x\,(x - x_o) = \frac{1}{2} m\,(v_x^2 - v_{xo}^2)$ d'où la formule à démontrer ■

Recherche de la vitesse

19. Énoncé :
    - les positions x et x_o ou la différence $x - x_o$ sont données,
    - la force F_x est donnée,
    - la vitesse initiale v_{xo} est donnée.
20. But du calcul : connaître la vitesse atteinte v_x.
    Résolution.
21. Une addition de l'énergie cinétique initiale aux deux membres de la formule de l'al.2 donne
    $F_x\,(x - x_o) + \frac{1}{2} m\, v_{xo}^2 = \frac{1}{2} m\, v_x^2$.
22. Une multiplication par 2 et une division par m donnent $\frac{2}{m} F_x\,(x - x_o) + v_{xo}^2 = v_x^2$.
23. On prend enfin la racine carrée et trouve $\sqrt{\frac{2}{m} F_x\,(x - x_o) + v_{xo}^2} = \sqrt{v_x^2}$.
24. Par définition, la racine carrée d'un nombre a est le nombre algébriquement positif écrit $\sqrt{a}$ dont le carré est a.
    Mais alors l'opposé $-\sqrt{a}$ a aussi a comme carré.
25. Comme à priori rien n'est dit dans l'énoncé sur le signe de la cote v_z de la vitesse on doit écrire les deux solutions
    $v_x = \pm \sqrt{\frac{2}{m} F_x\,(x - x_o) + v_{xo}^2}$.
26. Note : si $v_x > 0$, le corps circule dans le sens de l'axe des abscisses et si $v_x < 0$, le corps circule dans le sens opposé.

§25 Le travail

27. Soit une succession de déplacements d'un corps (fig. 22a) et suivons une des forces qu'il subit. Le premier déplacement occasionne un travail $W_{\text{de D à D1}}$ et change la vitesse d'une valeur v_{D} à une valeur v_{D1}. Un deuxième déplacement occasionne un travail $W_{\text{de D1 à D2}}$ et change la vitesse d'une valeur v_{D1} à une valeur v_{D2}. On peut imaginer ainsi autant de déplacements successifs qu'on veut. Après le *n*ième déplacement, la vitesse varie de $v_{\text{D}n}$ à v_{A}. Le théorème de newton donne alors

$$\boxed{W_{\text{de D à D1}} + W_{\text{de D1 à D2}} \ldots + W_{\text{de D}_{n-1} \text{ à D}_n} \text{ est égale à la variation de } \frac{1}{2} m v^2}.$$

28. Étant donné qu'un travail peut aussi bien être algébriquement positif que négatif, la somme à gauche de cette formule est une somme algébrique.

Un classement des travaux

29. Soit un corps allant d'un lieu de départ D vers un lieu d'arrivée A (fig. 22b).
30. Suivons le travail d'un des forces subies par le corps selon un itinéraire puis selon un autre.
31. Soit le travail change, on dit alors que la force et son travail sont **non conservatifs**, nous les écrirons $W_{\text{non cons}}$,
32. Soit le travail ne change pas, on dit alors que la force et son travail sont **conservatifs**, nous les écrirons W_{cons}.
33. **Quand un corps change d'itinéraire pour aller d'un lieu de départ donné à un lieu d'arrivée donné, le travail d'une force conservative ne change pas**.

Les travaux conservatifs ont alors une propriété remarquable.

34. Soit (fig. 22c) un troisième lieu R. Que le corps passe ou non par R pour aller de D à A en passant ou en ne passant pas par R, le travail $W_{\text{de D à A}}$ ne change pas. On peut écrire alors $W_{\text{cons de D à A}} = W_{\text{cons de D à R}} + W_{\text{cons de R à A}}$.
35. C'est en particulier vrai si le corps revient sur son lieu de départ et alors $W_{\text{cons de D à A}} = W_{\text{cons de D à R}} + W_{\text{cons de R à A}}$.
36. Mais $W_{\text{de D à D}}$ est le travail quand le corps ne bouge pas, donc est nul, donc on a zéro à gauche de la formule donc $W_{\text{cons de D à R}}$ et $W_{\text{cons de R à D}}$ sont algébriquement opposés.
37. **Un travail conservatif à l'aller et ce travail au retour sont algébriquement opposés.**

38. On a donc $W_{\text{cons de D à A}} = W_{\text{cons de D à R}} - W_{\text{cons de A à R}}$.

39. Une fois choisi le lieu R, celui-ci joue le rôle de référence et on a pris l'habitude de nommer U_{A} le travail $W_{\text{cons de R à A}}$ et U_{D} le travail $W_{\text{cons de R à D}}$ si bien que

40. $\boxed{W_{\text{cons de D à A}} = U_{\text{D}} - U_{\text{A}}}$.

41. Exemple : D est la position d'un corps accroché sur une potence et A est le sol. On détache le corps et il tombe à cause de son poids, une force dont le travail est $m\,g\,h$ (paragraphe 13) où h est la hauteur de chute.
42. Cet exemple a inspiré le vocabulaire **énergies potentielles** pour U_{D} et U_{A}.
43. **Un travail conservatif est assimilé à la variation de énergie potentielle d'une force entre un lieu de départ et un lieu d'arrivée**.

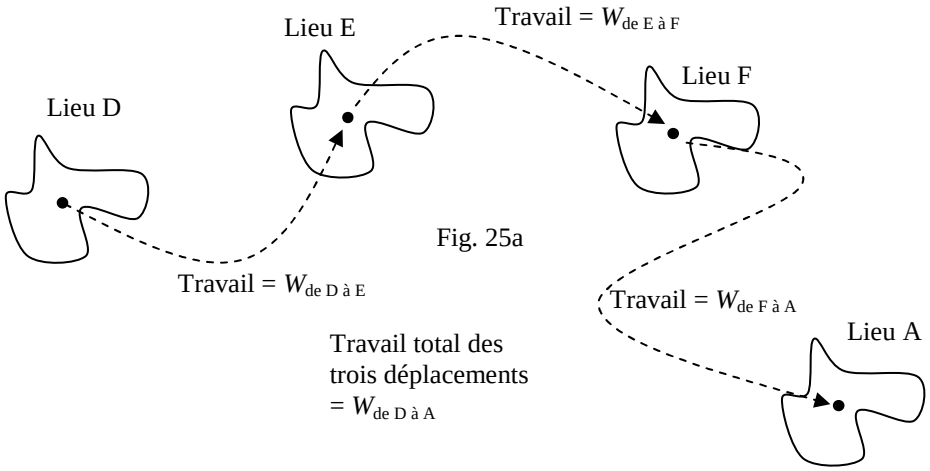


Fig. 25a

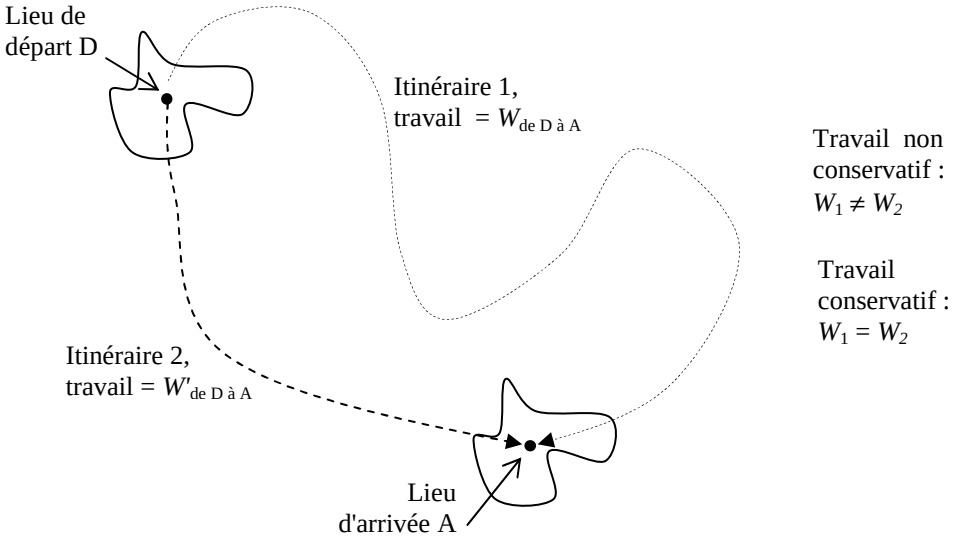


Fig. 25b

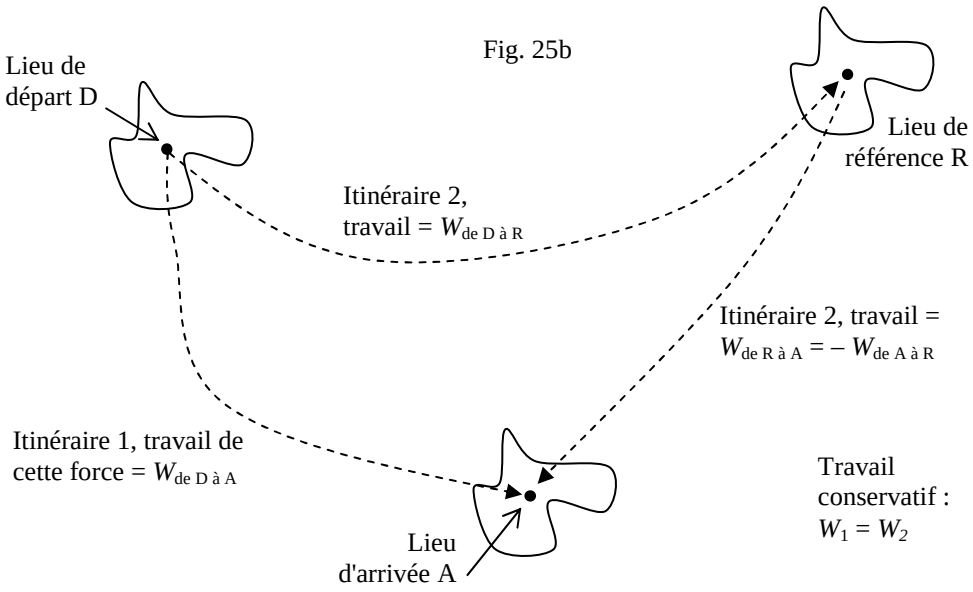


Fig. 25c

§26 Exemple de travaux

Travail d'un poids (fig. 15a).

1. Les flèches qui représentent un poids sont verticales vers le bas, donc leur empennage et leur pointe ont même abscisse, même ordonnée, mais pas la même cote. Pour un mouvement quelconque le travail est (paragraphe XX) $F_{\text{poids}} \cdot AB \cos(\overrightarrow{F}_{\text{poids}} ; \overrightarrow{AB}) = F_{\text{poids}} \cdot AH$.
2. Si l'angle est aigu le travail est algébriquement positif et si l'angle est obtus le travail est négatif.
3. Si cet angle est droit le travail est nul. C'est le cas des contacts parfaitement glissants.
4. Ce résultat montre que le travail d'un poids ne dépend que du changement de hauteur de l'objet durant son mouvement.
5. Or le poids lui-même est d'après la loi de Newton (paragraphe 7) $F_{\text{poids}} = m\,g$. La formule du travail du poids est donc $\boxed{W_{\text{poids}} = m\,g\,h}$ (formule 13a).
6. Cette formule montre aussi que **le travail d'un poids ne dépend que de la variation d'altitude entre les lieux de départ et d'arrivée**. Un tel travail est dit **conservatif** (paragraphe 11).

Travail sur un piston.

7. On admet que la force de poussée du fluide sur la face du piston est proportionnelle à son aire (tableau 23a).
8. Le travail de la force est $W = F\,x$. D'après le tableau (23a) on a $F = P\,S$ donc $W = P\,S\,x$. Mais $S\,x$ est la multiplication de l'aire de la base du cylindre coloré par sa hauteur (figure 23b), c'est-à-dire son volume V donc $\boxed{W = P\,V}$ (formule 13b).
9. **La travail d'une force pressante est la multiplication de la pression par le volume engendré par le déplacement de la surface pressée.**

Travail d'une force tangente à la trajectoire

10. Nous supposerons que, si l'orientation des flèches du vecteur qui représente la force est constante, alors le travail le long de la trajectoire de longueur L (fig. 23c, flèches rouges) est $F\,L$. Le travail de la même force le long de l'itinéraire de longueur L' plus grand que L est (flèches bleues) $W' = F\,L'$ donc on a $W' > W$.
11. **Le travail de cette force change si on change l'itinéraire**.
12. Un tel travail est dit **non conservatif** (paragraphe 11).

Travail d'une force variable

13. La formule $W = F\,L$ est l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur F. Comme dans le paragraphe 2, l'idée se généralise aux forces variables (fig. 23d à 23f). Un cas particulier est une force proportionnelle à l'élongation d'un ressort (fig. 23f et tableau 23b).
14. Le travail de la force élastique linéaire est *au signe algébrique près* $W = \left(\frac{1}{2} K\,x\right) x$ soit $\boxed{W_{\text{élastique}} = (\text{signe})\,\frac{1}{2} K\,x^2}$ (formule 12c).
15. **Le travail d'une force élastique linéaire est proportionnel au carré de l'élongation**.
16. Le choix du signe algébrique est justifié sur les fig. 23g et 23h.

Travaux moteurs

17. On appelle ainsi quand ils sont algébriquement positifs (fig. 23a, 23b et 23g).

Travaux résistants

18. On les appelle ainsi quand ils sont négatifs (voir le travail du lien élastique fig. 23h).

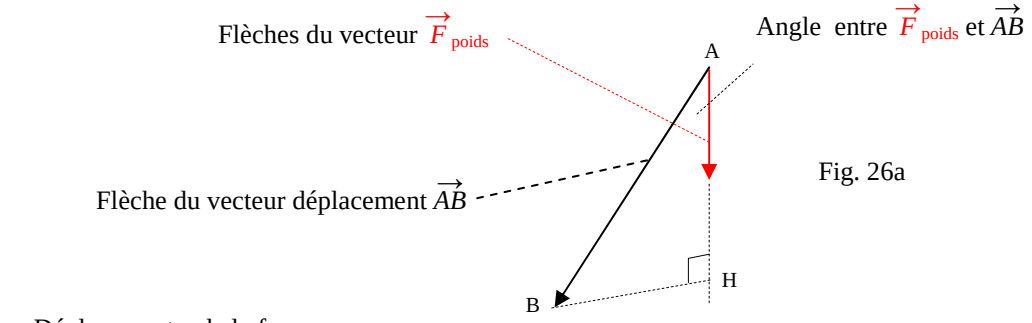


Fig. 26a

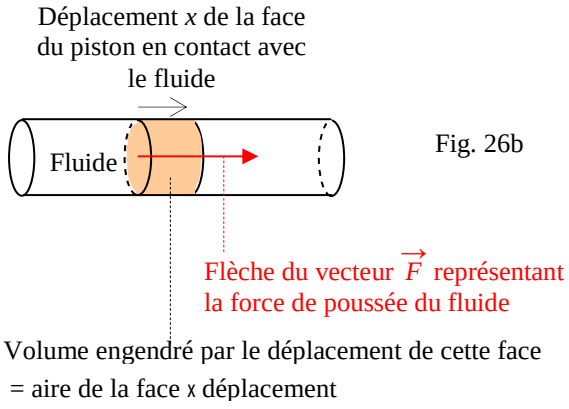


Fig. 26b

Proportion	
Aire pressée	Force
S	F
1	P

Tableau 26a : définition de la pression

Proportion	
Distance	Force
x	F
1	K

Tableau 26b : définition de la force élastique linéaire

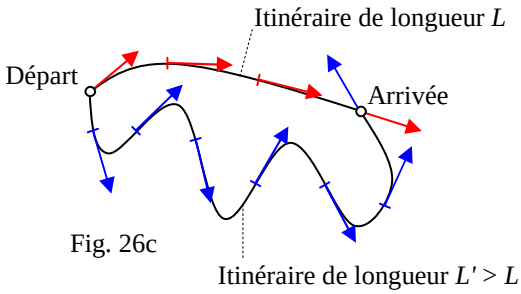


Fig. 26c

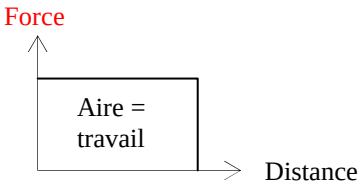


Fig. 26d

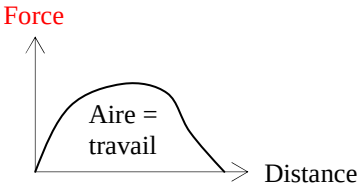


Fig. 26e

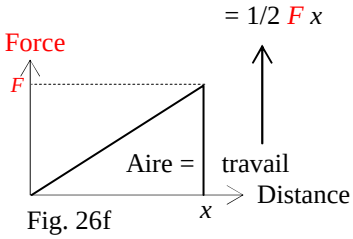
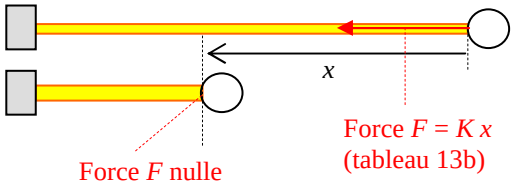
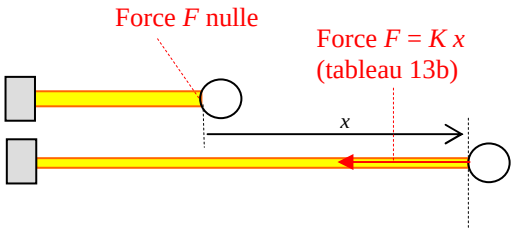


Fig. 26f





Travail positif = $+\frac{1}{2} K x^2$

Fig. 26g

Travail négatif = $-\frac{1}{2} K x^2$

Fig. 26h

Légende

Lien élastique linéaire

Point fixe par rapport au repère de l'espace

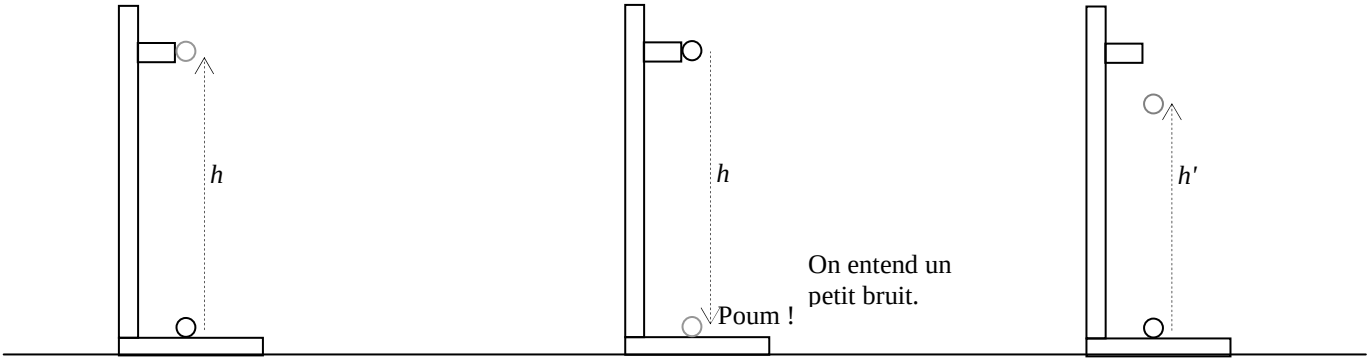
§27 Notion d'énergie et de puissance

1. On écrit (paragraphe 12) que la somme des travaux est égale à la variation de l'énergie cinétique, puis on détaille les travaux selon leur caractère conservatif ou pas donc **la somme des travaux non conservatifs et des travaux conservatifs est égale à la variation de l'énergie cinétique**.
2. Cette phrase est un peu longue, alors avec un nouveau code on va utiliser une écriture plus rapide : si A est l'arrivée et D le départ,
3. $W_{\text{non cons}} + W_{\text{cons}} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_D^2$.
4. La lettre *W* vient du mot anglais *work* = travail.
5. Une soustraction de W_{cons} aux deux membres de cette égalité donne
   $W_{\text{non cons}} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_D^2 - W_{\text{cons}}$.
6. Mais un travail conservatif a un autre intérêt (paragraphe 12) : $W_{\text{cons de D à A}} = U_D - U_A$ donc
   $W_{\text{non cons}} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_D^2 - U_D + U_A = \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + U_A\right) - \left(\frac{1}{2} m v_D^2 + U_D\right)$ donc

   $\boxed{W_{\text{non cons}} = \text{variation de } \left(\frac{1}{2} m v^2 + U\right)}$ (formule 14a).
7. Cette formule est très importante : on l'appelle la **loi de conservation de l'énergie**.
8. L'expression **énergie mécanique** ("énergie" est un mot du genre féminin) désigne la quantité entre parenthèses de la formule (14a).
9. Elle est en deux parties : **énergie cinétique** (parce qu'elle dépend de la vitesse) et **énergie potentielle** (parce qu'elle dépend de la position).
10. La présence de l'adjectif "mécanique" est justifiée par la très riche expérience des acteurs de la Révolution industrielle (techniciens et ingénieurs).
11. La figure 24a illustre la non conservation de l'énergie mécanique lors les rebonds d'une balle en caoutchouc.
12. Or, intuitivement les physiciens et les acteurs de l'industrie étaient persuadés que l'énergie de l'ensemble constitué d'un système et de son environnement se conserve toujours.
13. Il manque donc la mention d'une énergie non mécanique : on a pensé alors à une énergie du bruit.
14. **L'activité industrielle** a démontré que les quantités contenues dans $W_{\text{non cons}}$ ne sont pas toutes des travaux au sens mécanique.
15. En effet, dans $W_{\text{non cons}}$ il y a les travaux des forces de frottement. Ils ont été minutieusement mesurés et au bout des calculs on s'est aperçu que **le compte n'y est pas**. Or ces frottements font du bruit et échauffent les parties en contact au point même de créer de la lumière (étincelles de meulage par exemple). D'où l'idée alors nouvelle que **la chaleur est aussi une énergie**.
16. De même on a admis que **le son et la lumière sont d'autres manifestations de l'énergie**.
17. La découverte de l'électricité produite par des mouvements mécaniques (dynamos, alternateurs) et de mouvements produits par de l'électricité (moteurs électriques) montre aussi que **l'électricité est encore une énergie**.

PUISSANCE

18. Par définition la puissance échangée par un système est constante si l'énergie échangée est proportionnelle au temps. L'unité est le **j s^{-1} = w (watt).**
19. La variation de l'énergie d'un système physique est sensée être dérivable comme la position de ses points. On a donc puissance $P = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$.
20. La puissance cinétique est en abscisse $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m v_x^2\right) = \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x^2 = \frac{1}{2} m\, 2\, v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ où $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ est l'abscisse de l'accélération a_x.
21. Par addition membre à membre, on démontre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\text{cin}} = m (v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z)$ et entre parenthèses on lit le produit scalaire de la vitesse par l'accélération : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\text{cin}} = m \mathbf{v} \mathbf{a}$. Mais le produit scalaire étant commutatif et associatif $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\text{cin}} = (m \mathbf{a}) \mathbf{v}$ et la définition par Newton de la force donne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\text{cin}} = \left(\sum \boldsymbol{F}\right) \mathbf{v}$ qui est le produit scalaire de la somme des force par la vitesse. Par addition membre à membre on démontre que **la puissance cinétique est la somme des produits scalaires des forces par les vitesses des parties du système**.



On soulève une balle élastique d'une hauteur *h*.

La balle tombe de cette hauteur *h*.

La balle rebondit et monte d'une hauteur *h'* inférieure à *h*.

Énergie fournie = $m\ g\ h$

Énergie consommée = $-\ m\ g\ h$, convertie en $1/2\ m\ v^2$, qui, en partie devient du bruit et en partie remonte la balle sur une hauteur *h'*.

0 = variation de $\{1/2\ m\ v^2 + m\ g\ h + E\}$.

Fig. 27a : conceptualisation de la conservation de l'énergie :
E est une énergie non mécanique

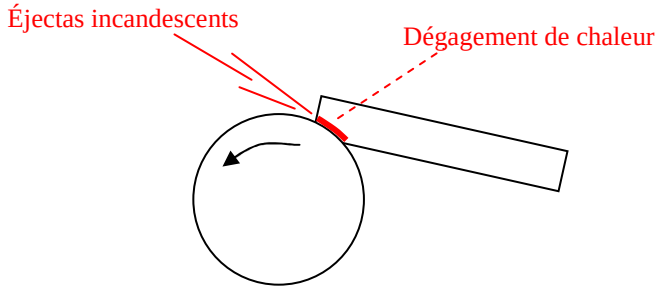


Fig. 27b : meulage

Temps	Énergie échangée
t	*E*
1	*P*
Proportion	

Tableau 27a
Définition d'une puissance constante

Temps	Énergie échangée
d*t*	d*E*
1	*P*
Proportion	

Tableau 27b
Définition d'une puissance variable

§28 Énergie et moments

ÉNERGIE CINÉTIQUE

13. Considérons l'énergie cinétique d'un corps en rotation. On suppose que l'axe de rotation est parallèle à l'axe des cotes. Le corps est sensé tourner sur lui-même, son centre restant immobile. Les projections des points du corps sur le plan Oxy suivent chacun un mouvement circulaire combiné avec un mouvement de translation. Les coordonnées d'un point du corps sont $\begin{pmatrix} R\cos\alpha(t) \\ R\sin\alpha(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où R est la distance séparant le point de l'axe de rotation et $z(t)$ une constante.

14. La vitesse a comme coordonnées les dérivées $\begin{pmatrix} R\,\omega(t)\cos\alpha(t) \\ R\,\omega(t)\sin\alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

15. Le carré de la vitesse est la somme des carrés de ses coordonnées
$v^2 = [R\,\omega\cos\alpha]^2 + [R\,\omega\sin\alpha]^2 + 0^2$ qui se développe puis se factorise
$v^2 = R^2\,\omega^2\,(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2) = R^2\,\omega^2$.

16. L'énergie cinétique du point mobile de masse dm est $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,R^2\,\omega^2$.

17. L'énergie cinétique totale du corps est $E_{\text{cin rot}} = \frac{1}{2}\sum_{\text{corps}}\,\mathrm{d}m\,R^2\,\omega^2$. Compte tenu que la vitesse angulaire et la composante de la vitesse en cote sont communes à toutes les parties du solide la factorisation donne $E_{\text{cin rot}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\text{corps}}\,\mathrm{d}m\,R^2\right)\omega^2$.

18. La somme entre parenthèses est par définition le moment d'inertie J du corps. On conclut $E_{\text{cin rot}} = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2$. C'est l'**énergie cinétique de rotation**.

TRAVAUX ET MOMENTS

19. Pour un point mobile, la variation de l'énergie cinétique en mouvement circulaire est $\mathrm{d}E_{\text{cin rot}}/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{\text{corps}}\,\mathrm{d}m\,R^2\,\mathrm{d}\omega^2/\mathrm{d}t$ avec $\mathrm{d}\omega^2/\mathrm{d}t = 2\,\omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. On a donc $\mathrm{d}E_{\text{cin rot}}/\mathrm{d}t = \sum_{\text{corps}}\,\mathrm{d}m\,R^2\,\omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$.

Application : Cavendish avait réussi la première mesure de la masse de la Terre et trouvé $m = 5{,}972 \times 10^{24}$ **kg**. Erastothène avait réussi une des premières mesures du rayon terrestre et trouvé $6{,}371 \times 10^{6}$ **m**. Le moment d'inertie est alors $J_{Terre} = \left(\frac{5}{2}\ \mathbf{m^{-3}}\right)\left(5{,}972 \times 10^{24}\ \mathbf{kg}\right)\left(6{,}371 \times 10^{6}\ \mathbf{m}\right)^5 = 1{,}56710 \times 10^{59}\ \mathbf{kg\ m^5}$.

Sa vitesse angulaire est $\omega = \frac{2\ \pi\ \mathbf{rd}}{24\ \mathbf{h} \times 3600\ \mathbf{s\ h^{-1}}}$ (un tour par jour) donc son énergie cinétique de rotation est $\frac{1}{2}\ J\ \omega^2 = \frac{1}{2}\ 1{,}56710 \times 10^{59}\ \mathbf{kg\ m^2}\left(\frac{2 \times 3{,}14}{24\ \mathbf{h} \times 3600\ \mathbf{s\ h^{-1}}}\right)^2 \approx 1{,}6 \times 10^{51}\ \mathbf{kg\ m^2\ s^{-2}}$ (ou **joules**).

Par comparaison en 2019 la consommation mondiale d'énergie par les humains est 6×10^{20} **joules***. L'énergie cinétique de la Terre permettrait de maintenir cette consommation pendant $T = \frac{1{,}6 \times 10^{51}\ \mathbf{j}}{6 \times 10^{20}\ \mathbf{j\ an^{-1}}} \approx 3 \times 10^{30}$ **ans**. Note : l'âge de l'univers est 13 milliards d'années soit $1{,}3 \times 10^{10}$ **ans**. La valeur précédente représete donc $N = \frac{3 \times 10^{30}\ \mathbf{ans}}{1{,}3 \times 10^{10}\ \mathbf{ans}} = 2{,}3 \times 10^{20}$ fois l'âge de l'univers. C'est ce qu'on appelle une échelle astronomique de valeur.

Temps	Énergie consommée
T **ans**	$1{,}6 \times 10^{51}$ **j**
1 **an**	6×10^{20} **j**
1 **s** = 1/365,25/24/3600 **an**	P
Proportion	

Tableau 28a

Temps

Temps	Temps de consommation énergétique humaine
$1{,}3 \times 10^{10}$ **ans**	1
3×10^{30} **ans**	N
Proportion	

Tableau 28b

Note* : source https://www.connaissancedesenergies.org/les-chiffres-cles-de-lenergie-dans-le-monde-en-2019-200617

Cette immense énergie est lentement consommée par la Terre par les effets de marée dus à la Lune (marées océaniques et terrestres) dans lesquelles le malaxage est source de chaleur. Née sur terre, elle se propage dans l'espace donc est perdue. Une estimation dit qu'il y a environ 70 millions d'années, les jours duraient environ 23h30 et la terre tournait sur elle-même 372 fois par an, contre 365,25 fois actuellement.
Comment l'a-t-on su ? Comme les bivalves, un mollusque actuel, les coraux ont un cycle de croissance annuel (effet des saisons) et un cycle de croissance journalier (alternance du jour et de la nuit). Pour faire simple, il suffit de compter le nombre de cycles par an et on en déduit la durée du jour terrestre. Dans une étude, parue dans la revue *Advancing Earth and Space Science*, les scientifiques expliquent qu'ils sont parvenus à repérer sur les bivalves au moins cinq marqueurs chimiques distincts pour une journée.
Source https://www.lci.fr/sciences/au-temps-des-dinosaures-une-journee-terrestre-durait-30-minutes-de-moins-qu-aujourd-hui-2147694.html

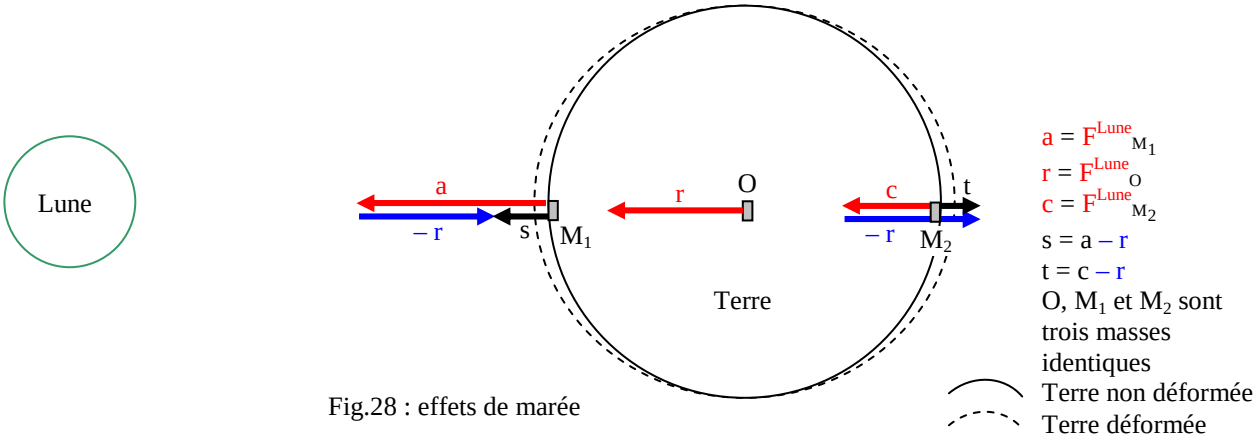


Fig.28 : effets de marée

§29 Classement des énergies en physique

1. Richard *Feynman* (prix Nobel de physique, 1965), dans le tome 1 de son *cours de Mécanique*, 1979, a écrit "L*'énergie nous apparaît sous un très grand nombre de formes différentes, et il existe une formule pour chacune. Ce sont : l'énergie gravitationnelle, l'énergie cinétique, l'énergie thermique, l'énergie élastique, l'énergie électrique, l'énergie chimique, l'énergie de rayonnement, l'énergie nucléaire, l'énergie de masse. Il est important de se rendre compte que dans la physique d'aujourd'hui, nous n'avons aucune connaissance de ce qu'est l'énergie*".

2. Avant de parler d'énergie, il faut définir de quel ensemble d'objets nous parlons :

3. on appelle **système physique** ou pour faire plus court **système** un ensemble donné de corps.

4. Ce système, à un instant donné, possède de l'énergie : on parle alors d'**énergie stockée**.

5. Ce système échange avec son environnement de l'énergie. On parle alors d'**énergie échangée**.

6. On ne peut stocker de l'électricité ni des ondes. Ces phénomènes transportent l'énergie d'un système à un autre. On parle alors d'**énergie tranférée**.

7. Les paragraphes précédents montrent la nécessité de classer les formes sous lesquelles l'énergie peut exister.

8. Mais ce classement est compliqué en raison de la diversité des phénomènes physiques dans lesquels l'énergie se manifeste. On peut trouver de très nombreux classement sur la Toile avec des catégories ou des classements controversés. deux exemples sont présentés page ci-contre.

9. On en vient à dire que *le meilleur classement des énergies est celui du lecteur, c'est-à-dire le vôtre* : suivez votre pensée et votre logique personnelles et vous serez sur le bonne voie.

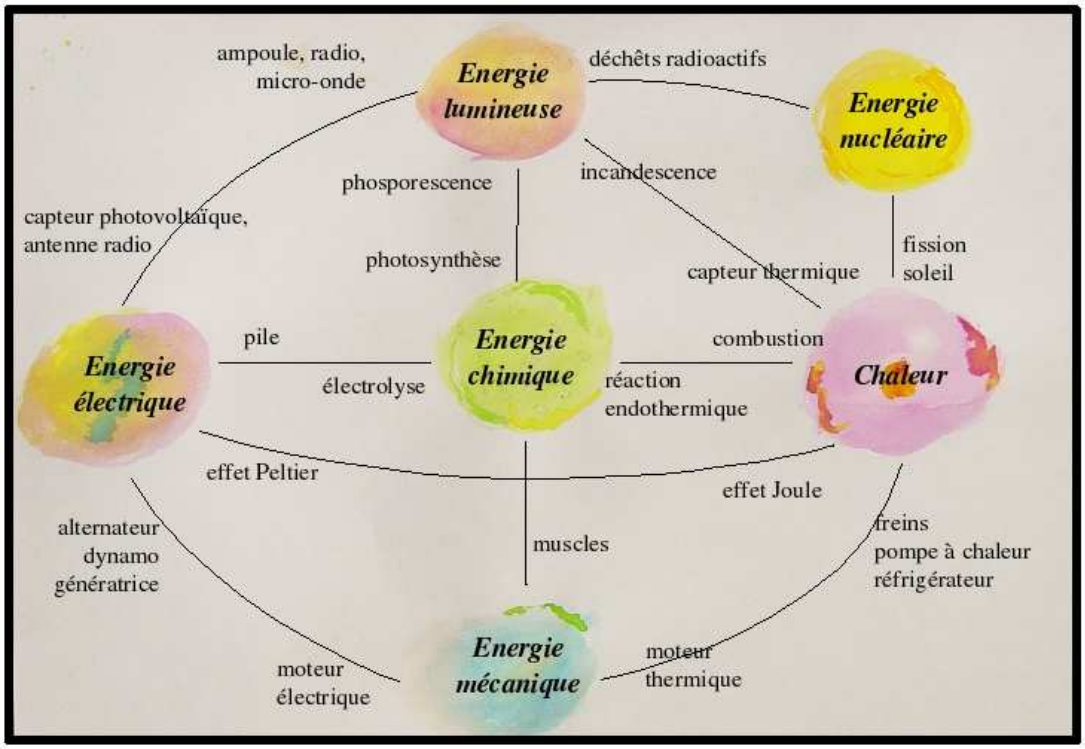
10. *Pour vous aider, je propose de vous poser quelques questions simples dont la réponse est "oui" ou "non".*
- Cette énergie est-elle cinétique ? Potentielle ? Est-ce un travail non conservatif ?
- Cette énergie est-elle d'origine interne au système ? Externe ?
- Les corps et leurs mouvements sont-ils macroscopiques ? Microscopiques ? Rappelons que le seuil de taille des corps pour répondre à cette question est la visibilité au microscope optique.

11. L'ensemble de réponses possibles est exposé dans le tableau 25a ci-dessous. Il n'est pas exhaustif*, ne serait-ce parce que les progrès scientifiques ou technologiques continueront de se développer, ouvrant la perspective de nouvelles formes de stockage et de transfert d'énergie.

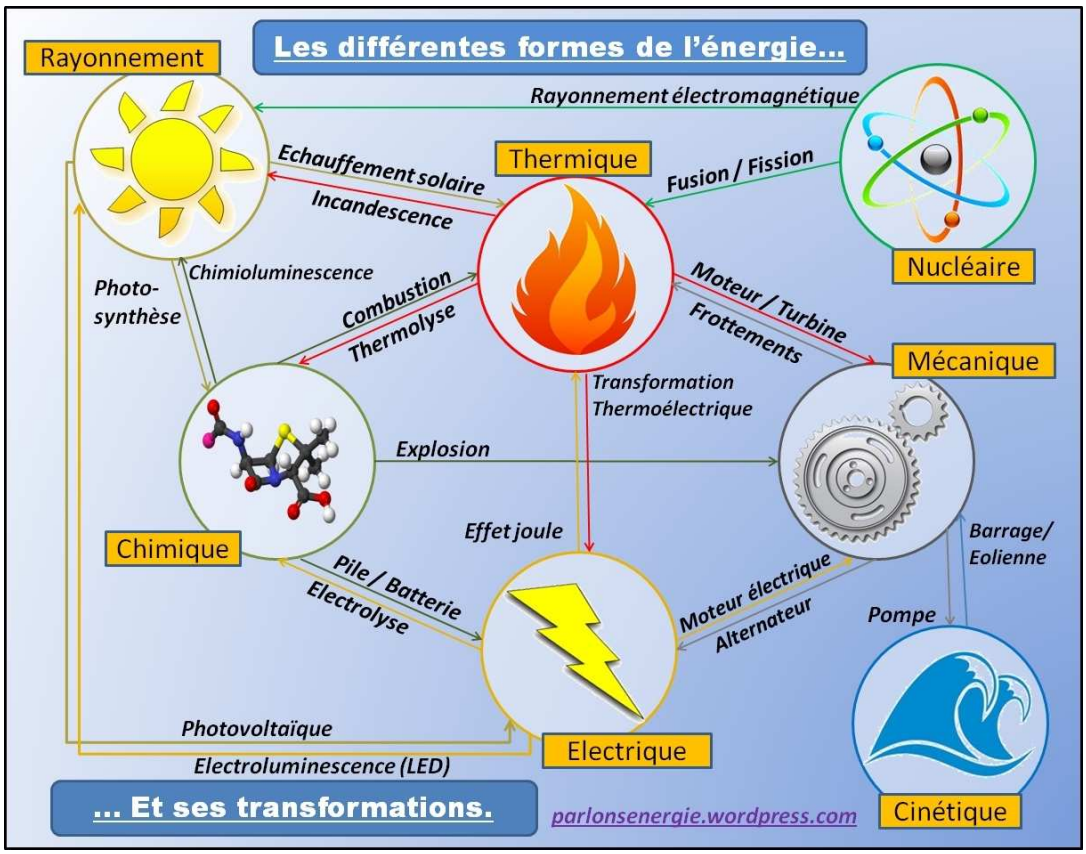
Nature	Qualités		Manifestations
Cinétique	Interne	Micro	Chaleur
		Macro	Courants de matières fluides, mouvements des solides
potentielle	Interne	Micro	Cohésion de la matière, forces entre ions, entre électrons et noyaux, forces électromagnétique, nucléaires faible et forte
		Macro	Forces entre pièces électrisées ou aimantées
	Externe	Micro	Mouillage
		Macro	Forces entre pièces électrisées ou aimantées du système
Travaux non conservatifs	Interne	Micro	Effet Joule, conduction de la chaleur
		Macro	Frottements internes
	Externe	Micro	Rayonnement de la chaleur entre le système et son environnement
		Macro	Pression et frottements de corps extérieurs sur le système.

Tableau 29a : comment classer les énergies à partir de sa propre logique

Note* : exhaustif : qui traite complètement et épuise un sujet donné.



Crédit : https://p-plum.pagesperso-orange.fr/sujet_energies_renouvelables/NRJSCnode1.html



Crédit : https://parlonsenergie.wordpress.com/2013/06/08/les-transformations-de-l-energie/

4 Relativité restreinte

§30 Le problème de la vitesse de la lumière

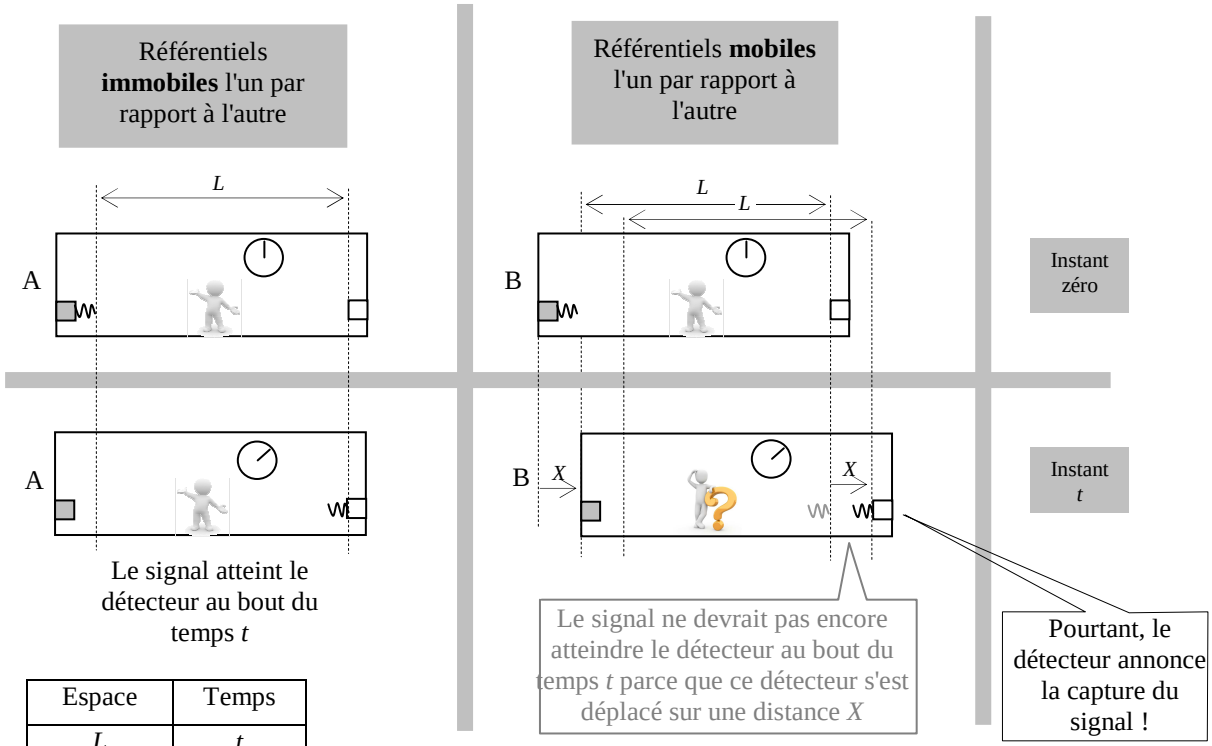
1. Un **référentiel** est un laboratoire équipé d'un dispositif de mesure des coordonnées des points matérialisés sur des corps par rapport à un repère lié aux locaux et d'une horloge (paragraphe 2).
2. Nous supposerons le repère orthonormé.
3. On considère deux laboratoires A et B (figure 26b), d'abord immobiles et ensuite bougeant l'un par rapport à l'autre à une certaine vitesse V.
4. On croyait que les longueurs mesurées dans les deux référentiels sont les mêmes : c'est le **principe de l'invariance des distances**,
5. On croyait aussi que les temps mesurées dans les deux référentiels sont les mêmes : c'est le **principe de l'invariance des temps**.
6. Mais l'expérimentation a contredit ces deux hypothèses.
7. Soient deux laboratoires A et B regardé de l'extérieur par un témoin. Celui-ci didpose de tout ce qu'il faut pour mesuter à distence la longueur du chemin entre une source lumineuse et un détecteur installés dans A comme dans B (figure 26a). C'est vous, l'observateur de la figure qui joue le rôle de ce témoin.
8. Le laboratoire A est immobile devant vous. Le B se déplace à la vitesse V.
9. C'est B qui pose problème : le temps que le signal parcoure la longueur L le déteteur s'est déplacé vers la droite et donc la distance que doit franchir le signal est plus longue. Il doit donc atteindre le détecteur au bout d'un temps plus long que t.
10. Le résultat expérimental fondamental est que tout se passe comme si on n'avait jamais réussi à démontrer la moindre différence entre les deux mesures.
11. Pour pouvoir expliquer ce paradoxe, il a fallu que **les physiciens remettent en question l'invariance séparée des longueurs et des temps** contrairement aux alinéas 4 et 5**.**
12. Ils songèrent alors à une invariance d'une nouvelle et unique grandeur pour l'espace et le temps. Mais laquelle ?
13. L'expérimentation a montré que si la quantité s solution algébriquement positive de l'équation $s^2 = c^2\,t^2 - L^2$ est nulle dans un référentiel, elle est nulle dans tous les autres.
14. La quantité s a été nommée **intervalle relativiste** ou simplement **intervalle**.
15. Pour un mouvement durant k fois plus longtemps, l'intervalle devient $s'^2 = c^2\,(k\,t)^2 - (k\,L)^2$ soit $s'^2 = c^2\,k^2\,t^2 - k^2L^2$. Une factorisation donne $s'^2 = k^2(c^2\,t^2 - L)^2$ donc $s'^2 = k^2 s^2$. En prenant les racines carrées on a $s' = k\,s$. Les intervalles s et s' sont donc proportionnels.
16. À priori, le coefficient k dépend de la position occupée par le laboratoire B par rapport à vous (ce qui contredirait l'homogénéité de l'espace), de l'orientation de son mouvement par rapport à vous (ce qui contredirait l'isotropie de l'espace) et de la vitesse de ce mouvement toujours par rapport à vous.
17. On conclut que k ne dépend que de la vitesse de B par rapport à vous, mais pas de son orientation.
18. Cas particulier : si cette vitesse est nulle, alors les laboratoires A et B sont immobiles par rappoort à vous, donc on peut considérer que les instruments de mesure donnent exactement les mêmes résultats, donc que les deux intervalles s et s' soient égaux, donc que $k = 1$.
19. Généralisation : cette valeur de k montre que les deux intervalles s et s' sont toujours égaux. Aucun fait expérimental nouveau n'est venu contredire cette hypothèse.
20. Alors on a adopté le **principe de l'invariance de l'intervalle relativiste**.
21. Une transformation littérale donne $s^2 = t^2\,c^2 - l^2/c^2 = t^2\,(c^2 - v^2) = t^2\,c^2\,(1 - v^2/c^2)$.
    La prise de la racine carrée donne alors $s = c\,t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

22. Écrivons la formule en mentionnant les unités : s **unité** $= (c\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1})\,(t\ \mathbf{s})\sqrt{1 - (v\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1})^2/(c\ \mathbf{m}\ \mathbf{s}^{-1})^2}$. L'unité du radicande est le 1 (paragraphe 4, on dit qu'il n'a pas d'unité). **L'unité de l'intervalle relativiste est le mètre**.
23. L'intervalle relativiste est sous son expression la plus simple (mouvements uniformes le long des abscisses) la solution algébriquement positive s de l'équation $s^2 = c^2\,t^2 - l^2$. Parce que c'est une longueur et non un temps, l'utiliser directement dans nos cours serait une gêne psychologique chez les élèves.

Temps relativiste

24. Le quotient $\tau = s/c$ est un temps, appelons-le "temps relativiste". On a donc $\boxed{\tau = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

(illustration fig. 19b).



Espace	Temps
L	*t*
c	1
Référentiel et Signal lumineux	

Proportions	
Signal lumineux	
Espace	Temps
L + *X*	*t*
c'	1
Référentiel	
Espace	Temps
X	*t*
V	1

Tableau 30a

Fig. 30a :
le problème de la vitesse de la lumière

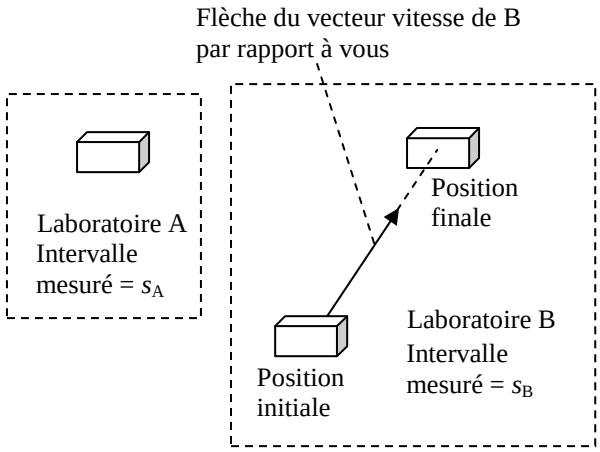


Fig. 30b :
de quoi peut dépendre l'intervalle relativiste ?

§31 Relativité restreinte

1. Une fois établi, argumenté et acquis le principe de l'invariance de l'intervalle relativiste (paragraphe 16), en lycée, les bases culturelles des collégiens devraient servir de support pédagogique à l'initiation aux formules relativistes restreintes. Le procédé consiste à adopter deux attitudes.

Première attitude

2. Passer des trois dimensions spatiales et du temps séparés à l'espace-temps, ce qui veut dire qu'on a affaire à quatre coordonnées, l'abscisse, l'ordonnée, la cote et une quatrième coordonnée qu'on va appeler "temporelle".
3. Pour homogénéiser les unités, cette quatrième coordonnée "temporelle" ne peut pas être un temps t mais doit être une distance $c\,t$.

Deuxième attitude

4. Substituer dans les formules le temps t par le temps relativiste τ.

Vitesse relativiste

5. On reprend la notion de mouvement uniforme (paragraphe 2) en substituant le temps t par le temps relativiste τ ce qui donne le tableau (27a). Par exemple, en abscisse la vitesse v_x devient *vitesse relativiste* ${}^{rel}v_x$, et le tableau 27a donne la formules $x = {}^{rel}v\,\tau$.
6. On remplace τ : $x = {}^{rel}v_x\, t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Une division par t donne à gauche $\frac{x}{t}$ donc la vitesse ordinaire v_x puis une autre division par la racine carrée donne $\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v_{rel\,x}$.
7. Par un raisonnement analogue en ordonnée et en cote on démontre les formules correspondantes. En résumé

$$\boxed{v_{rel\,x} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ v_{rel\,y} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ v_{rel\,z} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\ .$$

8. Mais il serait intéressant de voir ce que le raisonnement précédent donne avec la "coordonnée temporelle" de la vitesse relativiste, écrire $t = \beta\,\tau$ donc $t = \beta\, t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ et trouver $1 = \beta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ donc $\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$.
9. Les conséquences théorique et philosophiques de cette formule ont été extraordinaires.

Source : https://www.google
ZagGMdmwU5s8gp54tAug:
&sa=X&ved=2ahUKEwjnpc
R7CJcufV-QzM

Source : https://www.google
ZagGMdmwU5s8gp54tAug:
&sa=X&ved=2ahUKEwjnpc
UC6kfUXN8QNM

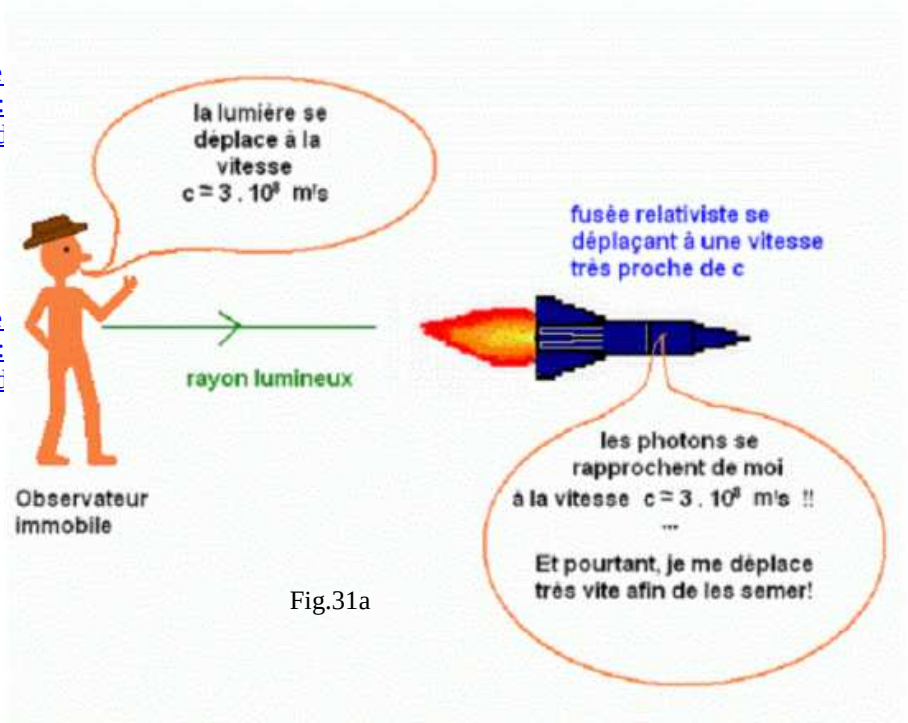


Fig.31a

Proportion	
Distance	Temps
x	τ
1 $v_{rel\ x}$	1

Tableau 31a :
Mouvement uniforme relativiste

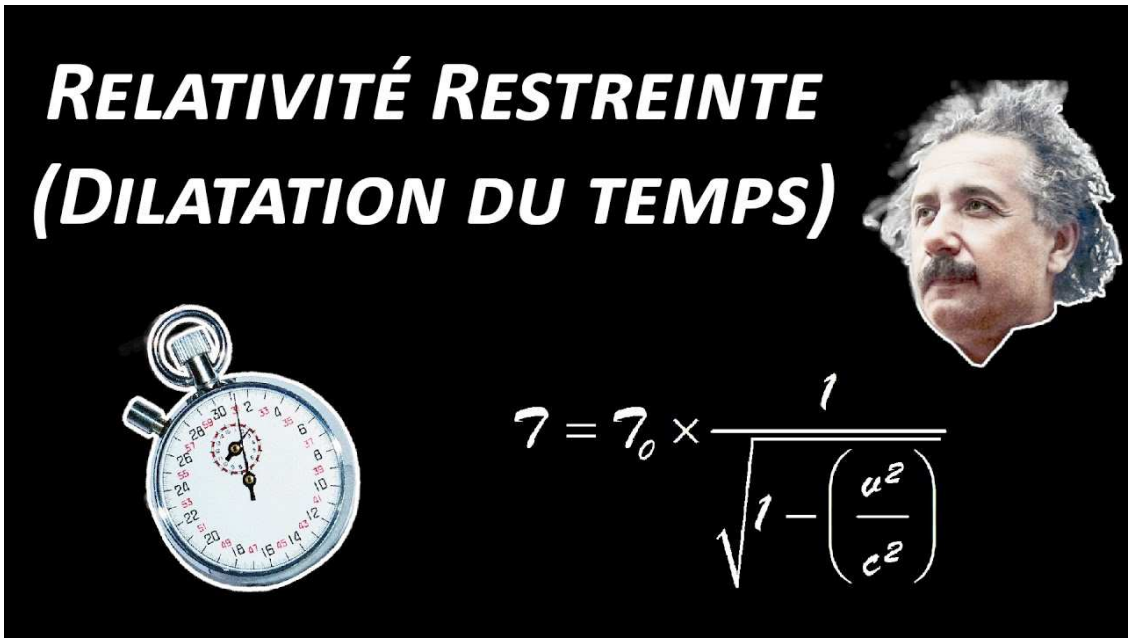


Fig.31b

§32 Énergie cinétique relativiste

1. La nouveauté la plus spectaculaire est l'interprétation physique de la vitesse relativiste temporelle C'est une nouveauté, aussi va-t-on désigner la "coordonnée temporelle" de la vitesse relativiste par une lettre spéciale, β.
   On a (paragraphe 17) la formule étrange $\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$. Étrange parce que cette "vitesse relativiste" est
   toujours plus grande que 1, ce qui n'est évidemment pas le cas de la vitesse ordinaire.
2. Ce qui suit, en collège, est plutôt une suite d'exercice d'algèbre dont le but est d'initier à la notion de valeur négligeable devant une autre et d'en démontrer son intérêt. Cette exercice est une opportunité de mise en œuvre de la pensée et logique personnelle des élèves pour argumenter sur un fait scientifique à la fois essentiel et très populaire.
3. Simplifions les écritures en renommant u le quotient $\frac{v^2}{c^2}$. Alors $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.
4. Multiplions les deux membres par la racine carrée : $\beta \sqrt{1-u} = 1$.
5. Élevons au carré : $\beta^2 (1-u) = 1$.
6. Appliquons à un cas particulier où u est nul : β prend la valeur numérique 1.
7. Si u est petit ***sans pour autant être nul*** alors β est augmentée d'une petite quantité h, donc prend la valeur $1 + h$.
8. L'alinéa 5 donne $(1 + h)^2 (1 - u) = 1$ et une identité remarquable donne $(1 + h^2 + 2h)(1 - u) = 1$ donc $[1 + h(h + 2)](1 - u) = 1$.
9. Si h est numériquement assez petit devant 2 au point de pouvoir négliger son addition à 2, la formule se simplifie en $[1 + 2h](1 - u) = 1$.
10. Un développement algébrique donne $1 - u + 2h - 2hu = 1$ donc $1 + 2h - 2hu - u = 1$ donc $2h - 2hu - u = 1$ donc $2h(1 + u) - u = 0$.
11. Si u est numériquement assez petit au point de pouvoir négliger sa soustraction à 1, alors $2h = u$ donc $h = \frac{1}{2}u$.
12. Substituant u selon l'alinéa 3, on a $\boxed{\beta = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}$.
13. Multiplions les deux membres de cette formule par $m c^2$: on obtient $\boxed{m c^2 \beta = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2}$.
14. L'interprétation physique de cette formule a connu une destinée extraordinaire.
15. Nous reconnaissons en effet l'expression $\frac{1}{2} m v^2$ de l'énergie cinétique du corps (paragraphe 11). En conséquence, les deux formules $m c^2 \beta$ et $m c^2$ sont pour les physiciens deux énergies. On les appelle **énergie cinétiques relativistes**. En particulier, si la vitesse du corps est nulle l'**énergie cinétique relativiste au repos** est $\boxed{E = m c^2}$, la plus célèbre formule de la physique que la postérité associe à Albert Einstein (fig. 28a).

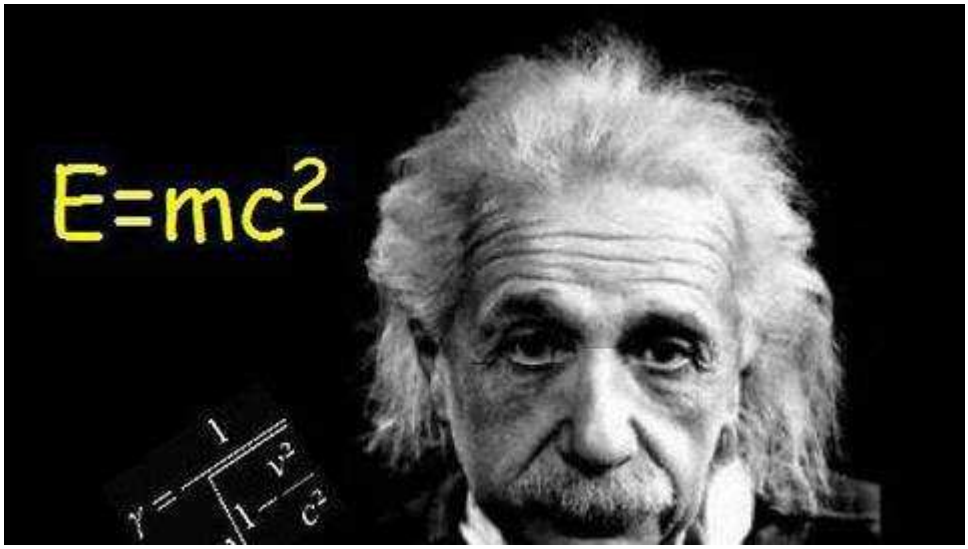


Fig. 32a

Source : https://www.google.fr/search?sxsrf=ALeKk02izHyhV-ZagGMdmwU5s8gp54tAug:1588603609477&source=univ&tbm=isch&q=images+relativit%C3%A9+restreinte&sa=X&ved=2ahUKEwjnpdPOuZrpAhVDRBoKHWtkDo0QsAR6BAgJEAE&biw=1366&bih=613#imgrc=A7FshcaktZkdCM

5 Électricité

§33 L'électricité, la chimie et le magnétisme

1. L'effet chimique se manifeste dans les électrolyseurs.
2. Le plus ancien connu est celui de l'eau (figure 29a).
3. Ce montage est désigné par le code d'écriture (matière de l'anode) / solution / (matière de la cathode).
4. Les électrodes sont en platine (qui ne réagit pas avec la solution) de symbole chimique Pt.
5. La solution (qu'on appelle électrolyte) est de la soude de formule chimique NaOH aqueux ou de l'acide sulfurique de formule chimique H_2SO_4 aqueux. Elle est codée $(NaOH)_{aq}$ ou $(H_2SO_4)_{aq}$.
6. L'indice aq vient du mot "aqueux" qui signifie "dissous dans l'eau".
7. Le code désignant l'électrolyseur est donc Pt/$(NaOH)_{aq}$/Pt ou Pt / $(H_2SO_4)_{aq}$/Pt.

Découverte de la quantité d'électricité

8. On connaît de nombreux types d'électrolyseurs aux aspects très variés. Montés en série (fig. 29b), ils démontrent une loi fondamentale : toutes les masses et tous les volumes apparus à la surface ou autour des électrodes obéissent à une et une seule proportion, que l'électrolyseur soit monté seul ou dans la série. La fig. 29 c montre une expérience de métallurgie de l'aluminium en laboratoire.
9. Coulomb avait proposé que toutes ces grandeurs de matière étaient proportionnelles à une seule grandeur électrique, la même quelque soit les électrolyseurs et leur nombre, du moment qu'ils soient montés en série. Cette grandeur est nommée "**quantité d'électricité**" ou "charge électrique qui passe" (tableau 29a et 29b).
10. Les chercheurs devaient donc convenir de choisir un électrolyseur de référence pour définir une unité de charge. Mais ils n'arrivèrent pas à s'entendre.
11. L'électrolyseur le plus fiable et le plus robuste connu alors était Ag / $(AgNO_3)_{aq}$ / Ag.
Ag est l'élément chimique argent, $AgNO_3$ est le nitrate d'argent. Ce sera Joule (page 21) qui proposa la définition actuelle du Coulomb.

Notion d'intensité électrique

12. Coulomb définit aussi le courant constant comme la proportionnalité de la charge qui passe avec le temps (tableau 29c).

L'électricité, le magnétisme et l'intensité

13. En 1818 Oersted cherchait comment mettre en évidence la modification physique de l'espace autour des courants électriques. Il eut l'idée de placer un fil conducteur au-dessus d'une aiguille aimantée orientée par le champ magnétiques terrestre (figure 29d et 29e), Cette aiguille et son comportement dans le voisinage des aimants ou des courants électriques suggéra que le champ magnétique peut être représenté par une flèche (en bleu sur les figures 29). Initialement parallèle au fil (en rouge), elle prend une autre orientation. La flèche du vecteur $\vec{B}_{fil}$ de la figure 29d est proportionnelle à l'intensité du courant électrique.
14. Tout se passe (tableau 29d) comme si B_{fil} et I sont proportionnels. Le coefficient β dépend du choix de l'aiguille, et de la distance qui la sépare du fil, ce qui donne toute une gamme d'instruments de mesure de l'intensité nommés aujourd'hui **ampèremètres**.

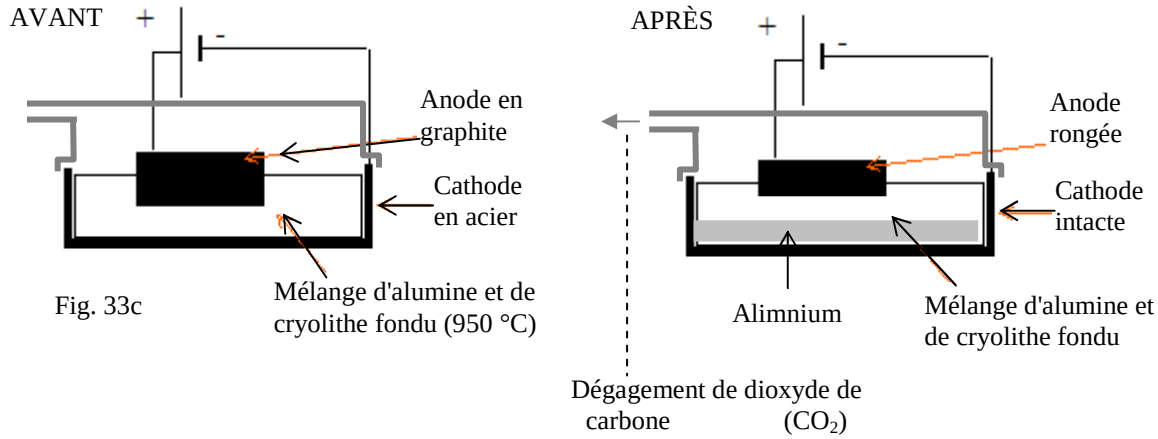


Fig. 33c

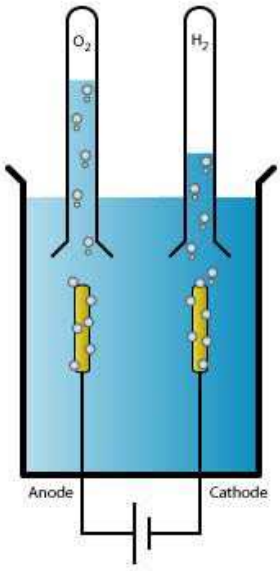


Fig. 33a : électrolyse de l'eau

Crédit : https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/chimie-production-hydrogene-plus-abordable-grace-energie-solaire-48112/

Proportion	
Charge qui passe	Temps
I	1
q	t

Table 33c : définition de l'intensité I du courant électrique constant selon Coulomb

Proportions			
Charge électrique qui passe	Anode	Cathode	
q	m_A	m_C	Masse
1	M_A	M_C	(Référence)

Table 33a
Notion de quantité d'électricité

Proportions			
Charge électrique qui passe	Anode	Cathode	
q	v_A	v_C	Volume
1	V_A	V_C	(Référence)

Table 33b : définition selon Coulomb des charges électriques qui passent

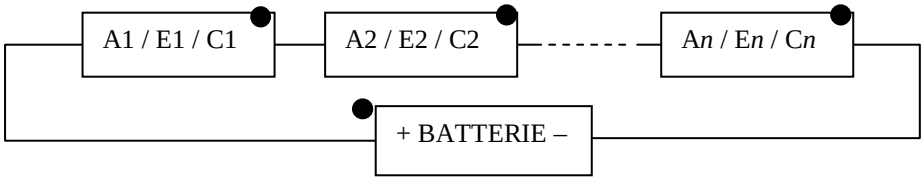


Fig. 33b : électrolyseurs montés en série

vers le Nord terrestre

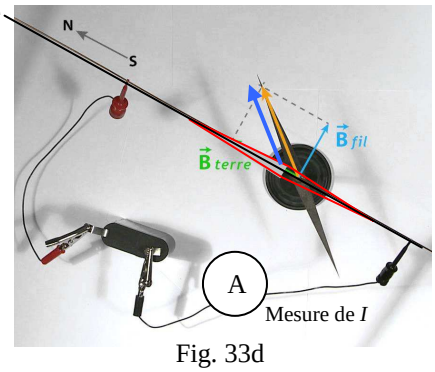


Fig. 33d

Crédit : https://www.youtube.com/watch?v=n7EWhEYOa0o

Vers le Sud terrestre

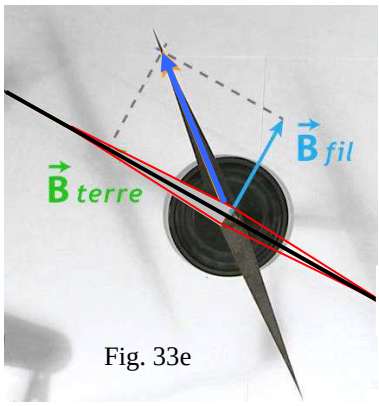


Fig. 33e

Proportion	
Champ magnétique	Intensité au sens de Coulomb
B_{fil}	1
β	I

Table 33d :
principe de la "boussole à la tangente"

§34 Électricité, travail et chaleur

1. James Prescott JOULE était d'abord un chimiste, particulièrement intéressé par les chaleurs dégagée par les réactions chimiques.
2. Il a étendu ses investigations à l'électricité puis à la mécanique. Voici trois de ses expériences fondamentales et les conclusions qu'il en a tirées.
3. Son idée directrice était que le travail, l'énergie cinétique, la chaleur et l'électricité sont tous des manifestations de la consommation d'une quantité de quelque chose qu'on appellera énergie.

De l'électricité à la chaleur

4. La figure 30a montre son premier centre d'intérêt : la chaleur dégagée dans les conducteurs électriques traversés par un courant. L'intuition initiale était que
   - si on double l'intensité en conservant la tension électrique et le temps de l'expérience alors la quantité de chaleur dégagée doublera.
   - si on triple la tension électrique en conservant l'intensité et le temps de l'expérience alors la quantité de chaleur dégagée triplera.
   - si on quadruple le temps de l'expérience en conservant la tension électrique et l'intensité alors la quantité de chaleur dégagée quadruplera.
5. Ces trois réflexion suggérèrent une loi du genre "chaleur dégagée = constante x tension x intensité x temps", D'où le formule $J\,Q = U\,I\,t$ qu'il avait testée (fig. 30b).

De l'électricité à la mécanique

6. Les figures 30c et 30d montre son deuxième centre d'intérêt : le travail fourni par les moteurs électriques.
7. L'intuition initiale était
8. si on double l'intensité en conservant la tension électrique et le temps de l'expérience alors la quantité de chaleur dégagée doublera.
9. si on triple la tension électrique en conservant l'intensité et le temps de l'expérience alors la quantité de chaleur dégagée triplera.
10. si on quadruple le temps de l'expérience en conservant la tension électrique et l'intensité alors la quantité de chaleur dégagée quadruplera.
11. Ces trois réflexion suggérèrent une loi du genre "travail obtenu = constante x tension x intensité x temps", d'où le formule $W = K\,U\,I\,t$ qu'il avait testée (fig. 30d).

Une nouvelle unité d'intensité électrique

12. On peut alors définir une fois pour toutes l'unité de I (paragraphe 19) qui rend la constante K égale à 1, et ce sera l'**ampère** (symbole **A**).

De la mécanique à la chaleur

13. Joule a monté des expériences établissant directement une relation entre travail et chaleur, sans passer par l'électricité (figure 30e et 30f). En effet la comparaison des formules donne $m\,g\,h$ et $U\,I\,t$ égales à $J\,Q$. La constante J de l'équivalence entre chaleur et travail semblait valoir entra 4 et 5.
14. Joule passa une bonne partie de sa carrière de chercheur sur ce sujet. En effet, d'importantes difficultés techniques contrarièrent les travaux : ce sont les ***pertes d'énergie***.

De l'énergie se perd

15. Les moteurs électriques ne commencent à tourner que si $U\,I$ dépasse un seuil, donc il faut du temps pour qu'il démarre donc une perte de quantité $U\,I\,t$ qui n'est pas converti en travail. Par contre on constate que le moteur "chauffe".
16. De même l'expérience 20a montre que tout conducteur électrique dégage de la chaleur quand le courant le traverse, donc, même quand le moteur tourne une autre partie de quantité $U\,I\,t$ n'est pas converti en travail mais en ***chaleur***. Aujourd'hui, les techniciens la désigne par l'expression ***pertes Joule***.
17. Enfin, aucune paroi de calorimètre n'est parfaite : lentement, de la chaleur s'échappe et il a fallu tester les calorimètre pour chiffrer les pertes de quantité $U\,I\,t$ en ***dissipation de chaleur***.
18. Conclusion : vers 1848, la communauté scientifique admit une équivalence entre travail et chaleur, avec le système d'unité d'aujourd'hui : temps en **s**, longueurs en **m**, masses en **kg**, tension électrique en **V**, intensité électrique en **A** et travail en **J**. Le coefficient J du tableau de proportion 30a est aujourd'hui estimé à

$$\boxed{J = 4{,}18399538\ \mathbf{J\ cal^{-1}}}.$$

Unités de l'époque :

19. ***Tension***, le Volt est le pouvoir électrique d'un élément de pile de Volta Cu / électrolyte / Zn ;
20. ***Intensité***, une des unités de ce temps (mg de matière déposée sur une cathode par seconde dans un électrolyseur choisi comme référence) ;
21. ***Chaleur***, une calorie est échangée par 1 g d'eau liquide quand sa température varie de 1 degré centigrade.
    Travail, un joule est fourni par une force de 1 newton tirant dans sa direction sur un mètre. Le nom "joule" ne sera adopté qu'après la mort du savant.

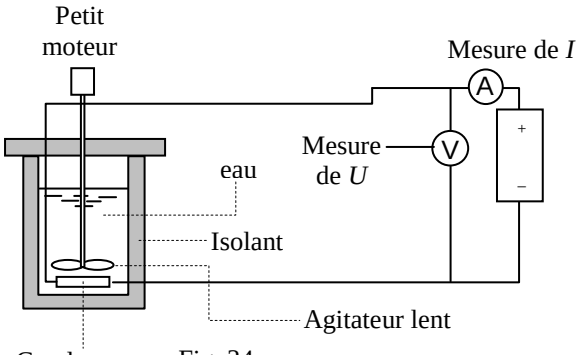


Fig. 34a
Établissement de la loi naturelle $Q = f(U,I,t)$

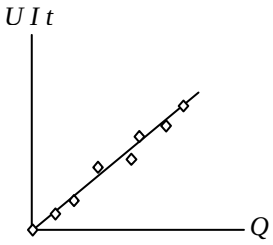


Fig. 34b
Modèle mathématique testé :
$J\,Q = U\,I\,t$
où J est une constante.

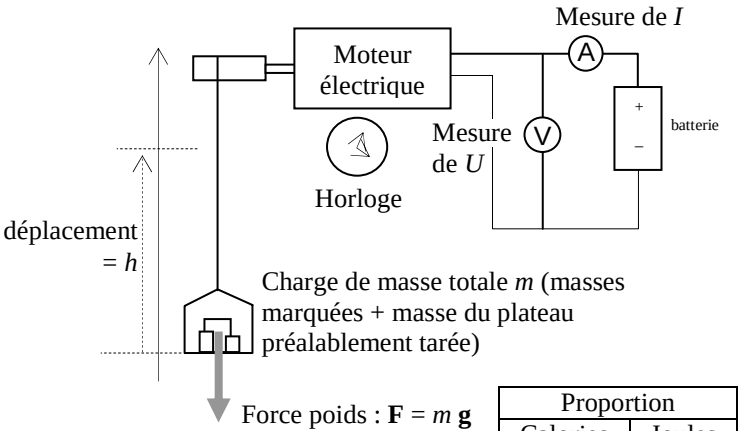


Fig. 34c
Établissement de la loi
$\sum W_{\text{non cons}} = f(U,I,t)$,
la fonction f étant à deviner.

Proportion	
Calories	Joules
1	*J*
Q	*W*

Table 34a
Conversion entre Joules et calories

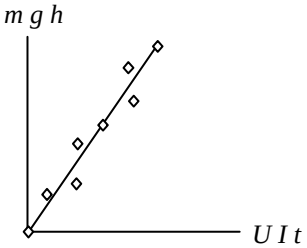


Fig. 34d
Modèle mathématique testé :
$m\,g\,h = K\,U\,I\,t$ où K est une constante.

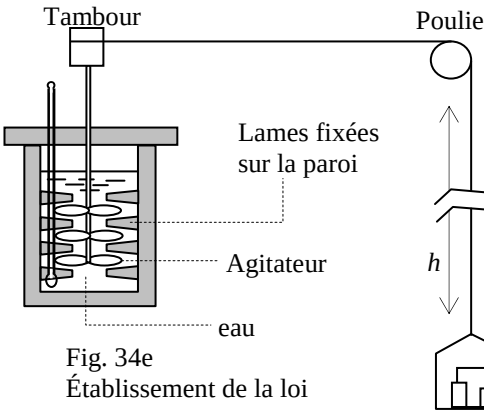


Fig. 34e
Établissement de la loi
$\sum W_{\text{non cons}} = f(U,I,t)$,
la fonction f étant à deviner.

Le travail est ici celui du poids
$W = m\,g\,h$

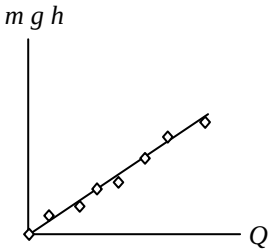


Fig. 34f
Modèle mathématique testé :
$m\,g\,h = J\,Q$ où J est la constante de Joule.

§35 Énergie et unités électriques

1. Un des plus grands scandales pédagogiques de ces dernières décennies en France fut l'interdiction d'accompagner les valeurs chiffrées des grandeurs par leur unité dans les application numériques des lois de la physique. Par exemple, pour une vitesse constante la formule $V = \frac{x}{t}$ appliquée avec les valeurs $x = 50$ **m** et $t = 4$ **s** donne le calcul $V = \frac{50\ \mathbf{m}}{4\ \mathbf{s}} = \frac{50}{4}\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}} = 12{,}5\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$.
2. Bien entendu, pas question d'écrire les unités dans les formules littérales comme $V = \frac{x}{t}$ et les enfants comprennent tous spontanément les risques de confusion.
3. Si j'ai écrit en "grasses" les unités, c'est par référence au fait (là on parle entre professeurs) que les grandeurs physiques jouent le rôle des vecteurs unitaires dans la géométrie vectorielle, les nombres jouant celle des coordonnées, et que les unités comme les vecteurs peuvent faire l'objet d'opérations (paragraphe 5) au même titre que les nombres (théorie du calcul tensoriel).

Les conversions entre travail et chaleur

4. Les conversions d'unité et sous-unités sont souvent ratées par les enfants. Sauf chez mes élèves depuis que je leur avais recommandé de dresser des tableaux de proportion (§34). Par exemple pour convertir 52400 **mm** en **m** on fait le tableau 31a en se posant la question "combien de **mm** dans 1 **m** ?".
5. De même, convertir 1000 calories en Joules donne le tableau 31f donc le résultat
6. $\boxed{W = J\ \boldsymbol{Q} \text{ avec } J = 4{,}18399538\ \mathbf{J\ cal^{-1}}}$ (formule 20a), soit $W = 4183{,}99538$ **J**.

L'Ampère

7. Le Volt et l'Ampère sont toujours très mystérieux pour les élèves. La faute est à l'éducation nationale parce que depuis des décennies, elle ne demande plus aux maîtres de raconter comment les notions et les unités électriques ont été inventées.
8. Le Volt était aux débuts de l'électricité le pouvoir d'un élément de pile de Volta (figure 31a) de mettre en mouvement le fluide électrique, à une époque où nul n'en connaissait la nature.
9. Nous savons que cette définition ne concerne que les piles avant qu'elle ne commence son effet, ce qu'on appelle la **force électromotrice**. Bien sûr, en collège cette expression est faite de "gros mots" trop "savants". Mais même sans exiger de retenir ces gros mots, nous devons le dire aux adolescents.
10. L'expérimentation des piles montra l'indépendance entre la force électromotrice mesurée, les dimensions des pièces et le volume ou la concentration de l'électrolyte, mais aussi la dépendance par rapport à la nature chimique de celui-ci et des électrodes.
11. A l'époque de Joule, il y avait pratiquement une unité de charge électrique et une unité d'intensité par électrolyseur (§29). Joule était contraint d'en choisir une comme référence, donc ses résultats pour les effets mécanique et thermique (§30) de l'électricité pourraient être présentés par le tableau 31d.
12. Il faut dire aux élèves que les physiciens de cette époque s'étaient concertés pour convenir un choix d'unité pour I tel que si W est en **Joules**, U en **Volts** et t en **secondes** alors J vaut exactement 1, et que cette unité fut appelée **Ampère**.

L'électron-Volt

13. La loi de Coulomb est en fait une définition des courants **constants** (j'ai horreur de l'adjectif "continu"). Le tableau 31b donne la loi $Q = I\ t$ qui permet de définir le **Coulomb** à partir de l'**Ampère** et de la **seconde**.
14. Jointe à la loi de Joule cela donne $W = U\ Q$ (tableau 31e). Une application chiffrée avec les unités montre que le **Joule** est la multiplication du **Volt** par le **Coulomb**.
15. Si on dit *on appelle electron-Volt le travail subi par un électron traversant une tension de 1 Volt*, cela donne immédiatement
16. $W = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **Coulomb** x 1 **Volt** = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **Joule** d'où le tableau de conversion 31g.

Proportion	
mm	**m**
1000	1
52400	*L*

Tableau 35a
Conversion d'unités

Proportion	
Charge qui passe	Temps
Q	*t*
I	1

Tableau 35b
Définition de l'intensité électrique

Proportion	
Joules	**…**
W	*U I t*
1	1

Tableau 35c
Définition de l'Ampère

Proportion	
Charge qui passe	Travail
Q	*W*
K	1 *U*

Tableau 35d
Définition du Coulomb

Proportion	
Joules	**…**
Q	*U I t = U Q*
1	*J*

Tableau 35e
Chaleur et électricité

Proportion	
calories	**Joules**
Q	*W*
1	*J*

Tableau 35f
Chaleur et travail

Proportion	
e-Volts	**Joules**
1	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$
$0{,}625 \cdot 10^{+19}$	1

Tableau 35g
Conversion entre e-Volts et Joules

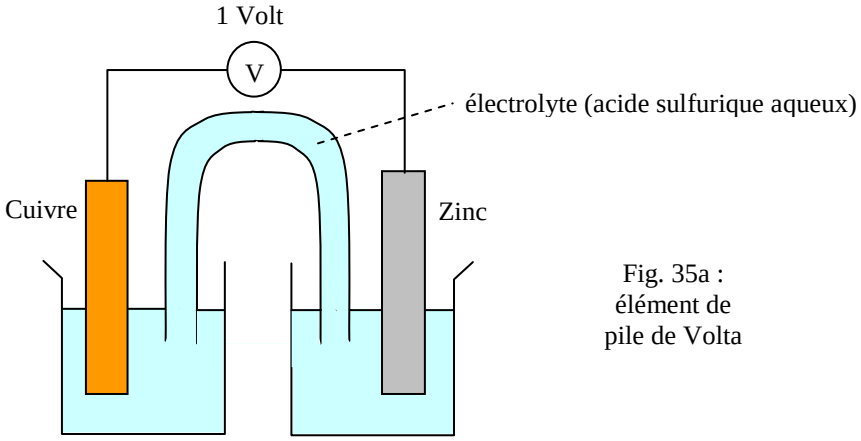


Fig. 35a :
élément de
pile de Volta

§36 Le voltmètre de Thomson

Principe : c'est un condensateur dont une armature est fixe et l'autre mobile (elle peut tourner) suspendue à un fil de torsion fin et conducteur. Un dispositif de projection optique donne une image sur un écran dont le déplacement est proportionnel à la tension électrique mesurée.

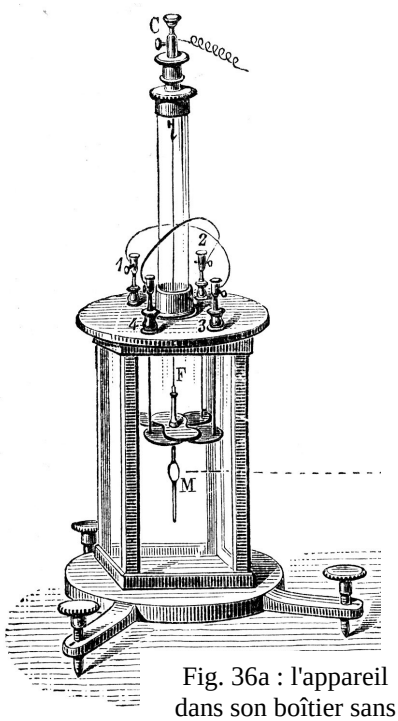


Fig. 36a : l'appareil dans son boîtier sans ses équipements

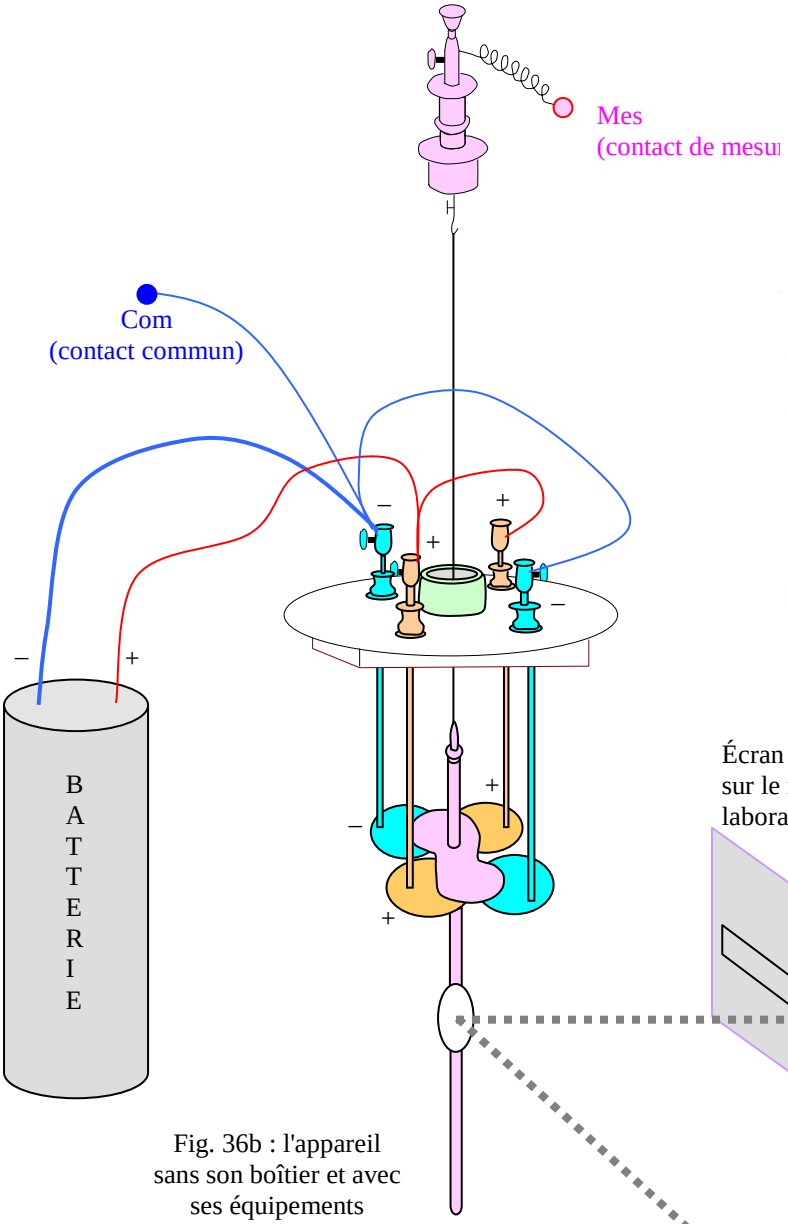


Fig. 36b : l'appareil sans son boîtier et avec ses équipements

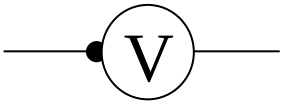
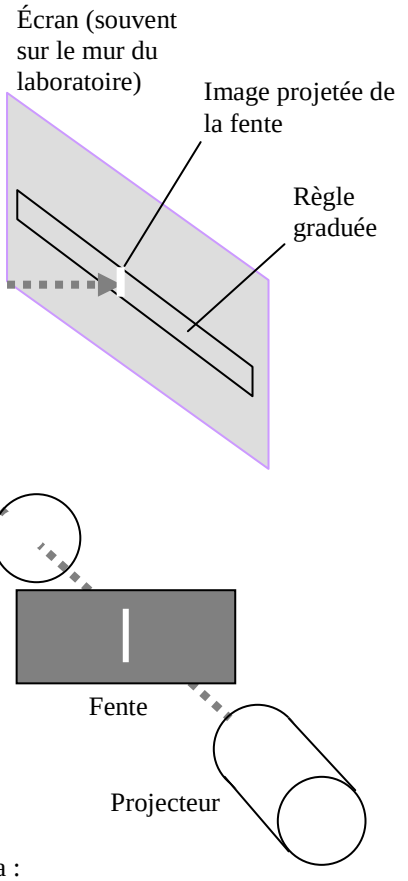


Fig. 36c
Symbole du voltmètre



Crédit de la fig. 22a :
https://www.google.fr/search?q=gravure+%C3%A9lectrom%C3%A8tre+thomson&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwjbuZG02uvbAhWIWRQKHSelAM4QsAQIPQ&biw=1366&bih=611#imgdii=BgyprzKG37xDmM:&imgrc=p67VwTJ_wfyA7M:

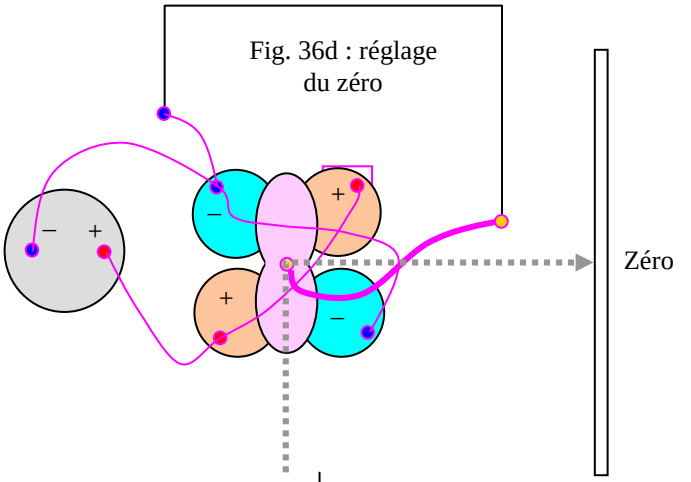


Fig. 36d : réglage du zéro

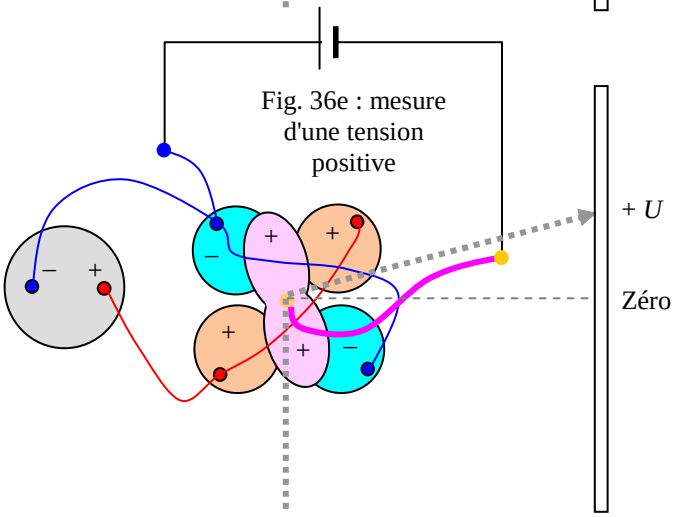


Fig. 36e : mesure d'une tension positive

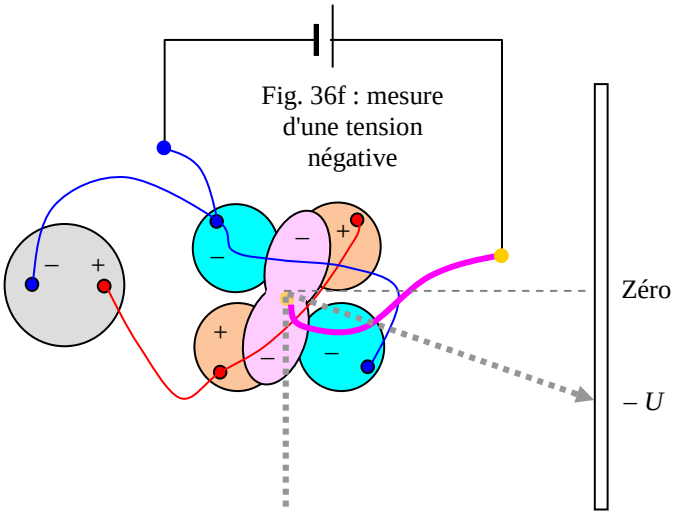


Fig. 36f : mesure d'une tension négative

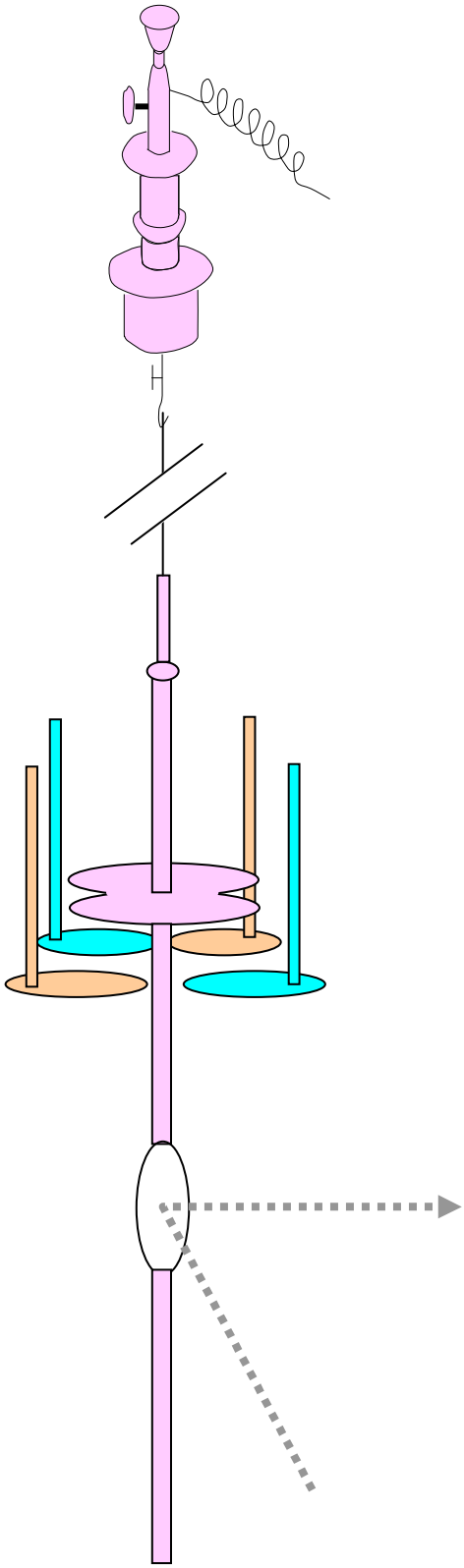


Fig. 36g : les parties électriques

Étalonnage de l'appareil

1- En tournant la pièce au sommet, on place l'image de la fente au centre de la règle graduée (fig. 21b).
2- On branche une batterie de force électromotrice connue *U* Volts (fig. 22d et suivantes).
3- On trace un trait sous l'image de la fente et le nomme + *U*.
4- On branche la batterie dans l'autre sens (fig. 22f).
5- On trace un trait sous l'image de la fente et le nomme – *U*.

6 Mathématiques

§37 La notion de fonction mathématique

1. Un **singleton** est un ensemble composé d'un unique élément. On les écrit par le nom de cet élément entre accolades.
   Par exemple le singleton composé de l'élément u est écrit $\{u\}$.
2. Une **paire** est un ensemble composé de deux élément et de deux seulement. On les écrit par le nom de ces éléments entre accolades et séparés par un point-virgule. L'ordre dans lequel les deux éléments sont écrits n'a pas d'importance.
   Par exemple la paire composée des éléments u et v est écrite $\{u\ ;\ v\}$ ou $\{v\ ;\ u\}$.

3. Si u et v sont distincts, alors le paires $\{\{u\ ;\ v\}\ ;\ v\}$ et $\{\{v\ ;\ u\}\ ;\ u\}$ ne sont pas les mêmes.
4. En mathématiques, ces paires sont appelées des **couples**. Comme on en fait un usage très fréquent et comme leur écriture est lourde, on a créé le code respectif $(u\ ;\ v)$ et $(v\ ;\ u)$ pour les désigner.
5. En conséquence, si u et v sont distincts, les couples $(u\ ;\ v)$ et $(v\ ;\ u)$ sont distincts.
6. Dans un couple comme $(u\ ;\ v)$, u est appelé l'**antécédent** et v l'**image**.

7. Une **fonction** est un ensemble de couples dans lequel chaque antécédent n'a qu'une image.

Exemples extraits des programmes de mathématiques de collège

Ici, les antécédents x sont des nombres réels.

8. Soit a un nombre. L'ensemble des couples $(x\ ;\ a)$ est une **fonction constante** ou encore **fonction de degré nul**. Sur la fig. 33a, le nombre a est la position de l'intersection de la ligne représentative avec l'axe des ordonnées.
9. Soit a un nombre. L'ensemble des couples $(x\ ;\ a\ x)$ est une **fonction linéaire**. Sur la fig. 33b, on voit l'allure de la représentation graphique en trait plein a est positif et en tirets a est négatif.
10. Soit a et b deux nombres. L'ensemble des couples $(x\ ;\ a\ x + b)$ est une **fonction affine** ou encore **fonction du premier degré**. . Sur la fig. 33c, on voit l'allure de la représentation graphique en trait plein a est positif et en tirets a est négatif.
11. L'ensemble des couples $(x\ ;\ x^2)$ est la **fonction carré** (fig. 33d).
12. Soit a, b et c trois nombres. L'ensemble des couples $(x\ ;\ a\ x^2 + b\ x + c)$ est une **fonction du deuxième degré**. Sur la fig. 33e, on voit l'allure de la représentation graphique en trait plein a est positif et en tirets a est négatif.
13. L'ensemble des couples $(x\ ;\ x^3)$ est la **fonction cube** (fig. 33f).
14. L'ensemble des couples $(x\ ;\ \sqrt{x})$ est la **fonction racine carrée** (fig. 33g).
15. L'ensemble des couples $(x\ ;\ 1\ /\ x)$ est la **fonction inverse** (fig. 33h).

Exemple mécanique

16. Un **mouvement** d'un point matérialisé sur un corps est modélisée mathématiquement par une fonction dont les antécédents sont des **temps** et les images des **points** de l'espace.
17.

Lien logique entre fonction linéaire et proportion

18. Soit la fonction linéaire ensemble des couples $(x\ ;\ a\ x)$. Si p et q sont deux antécédents, alors les couples $(p\ ;\ a\ p)$ et $(q\ ;\ a\ q)$ lui appartiennent. Formons le tableau 33a. On a bien $\frac{p}{q} = \frac{a\ p}{a\ q}$ donc le tableau 33a est bien un tableau de proportion.
19. **Les antécédents et les images d'une fonction linéaire** (al. 9) **sont proportionnels**.

Proportion	
Antécédents	Images
p	*a p*
q	*a q*

Table 37a

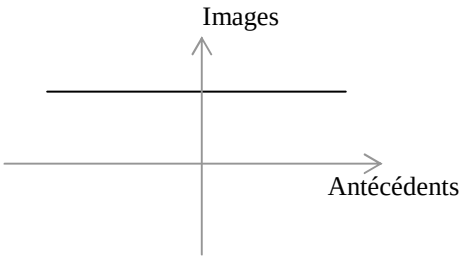


Fig. 37a

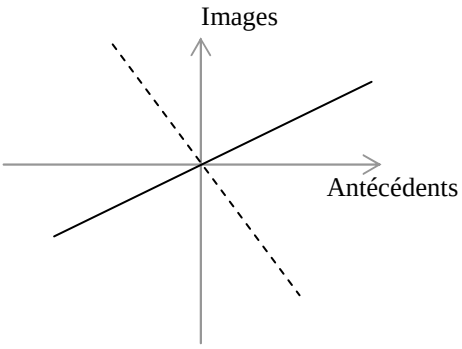


Fig. 37b

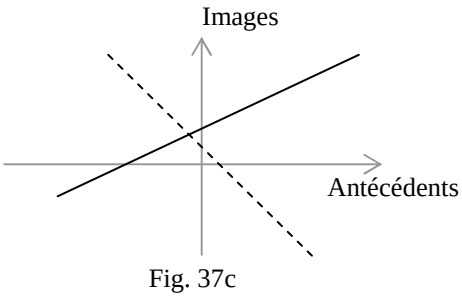


Fig. 37c

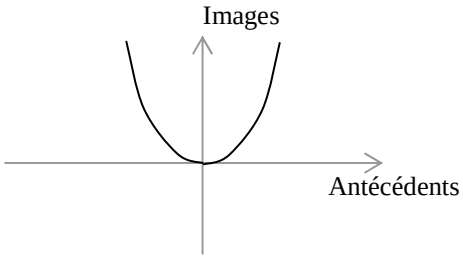


Fig. 37d

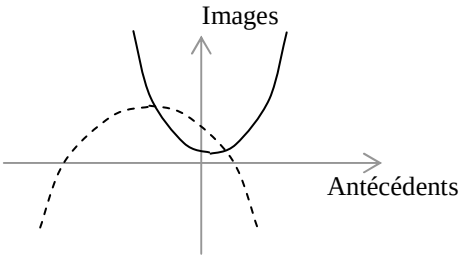


Fig. 37e

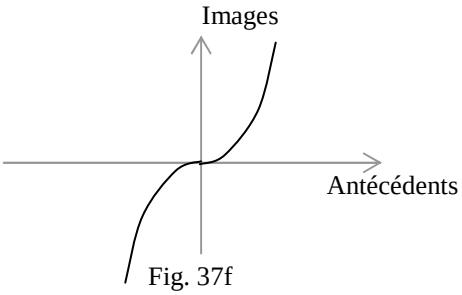


Fig. 37f

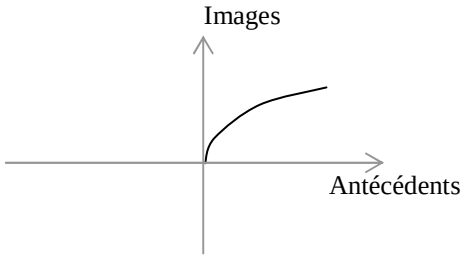


Fig. 37g

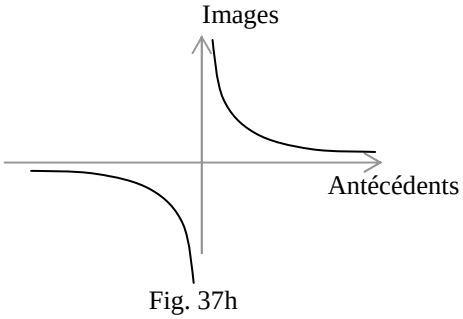


Fig. 37h

§38 Tableaux de proportion

Note : tous les tableaux de la page ci-contre sont des tableaux de proportion.

1. Traditionnellement, **par convention**, on a équivalence de signification entre cette écriture $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et le tableau 34a qu'on appelle **tableau de proportion**.
2. Si on multiplie les deux quotients par $a\ b\ c\ d$ puis simplifie, on obtient l'**égalité des produits croisés** (formule 24a).
3. Ces deux produits croisés donnent une grande quantité de propriétés mathématiques au tableau 34a. Page de droite sont exploitées les règles algébriques connues chez les nombres qui donnent toute une série de tableaux de proportions équivalents au 34a.
4. En haut, on démontre qu'**on peut permuter "les moyens et les extrêmes"**, autrement dit échanger les nombres sur une diagonale.
5. Au centre, on montre que **les deux lignes ou des deux colonnes lues dans le même sens donnent des quotients égaux**.
6. En bas, à gauche, on montre qu'**on peut faire sur les deux lignes ou les deux colonnes la même élévation à une puissance donnée ou la même prise de racine n-ième**.
7. En bas à droite, on montre qu'**on peut multiplier ou diviser une ligne ou une colonne par un nombre donné**.
8. Soit la formule 24a : elle dit que les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ont la même valeur q donc que $\frac{a}{b} = q$ et $\frac{c}{d} = q$ donc en multipliant les deux membres de ces égalités par le diviseur, $a = b\ q$ et $c = d\ q$. En additionnant ou soustrayant membre à membre puis en factorisant q on a $a \pm b = (b \pm c)\ q$ donc $\frac{a \pm c}{b \pm d} = q$.
9. **Les quotients tirés d'un tableau de proportion sont égaux au quotient de la somme (ou différence) des numérateurs par la somme (ou la différence) des dénominateurs.**

10. **Applications** : par exemple, a et q étant deux nombres donnés, si on a à résoudre l'équation d'inconnue x $a = \frac{k}{x - q}$ on pense à $a = \frac{a}{1}$ et dresse le tableau 34b.
    Ensuite, on écrit $x - q = \frac{k}{a}$ puis la solution $x = \frac{k}{a} + q$.

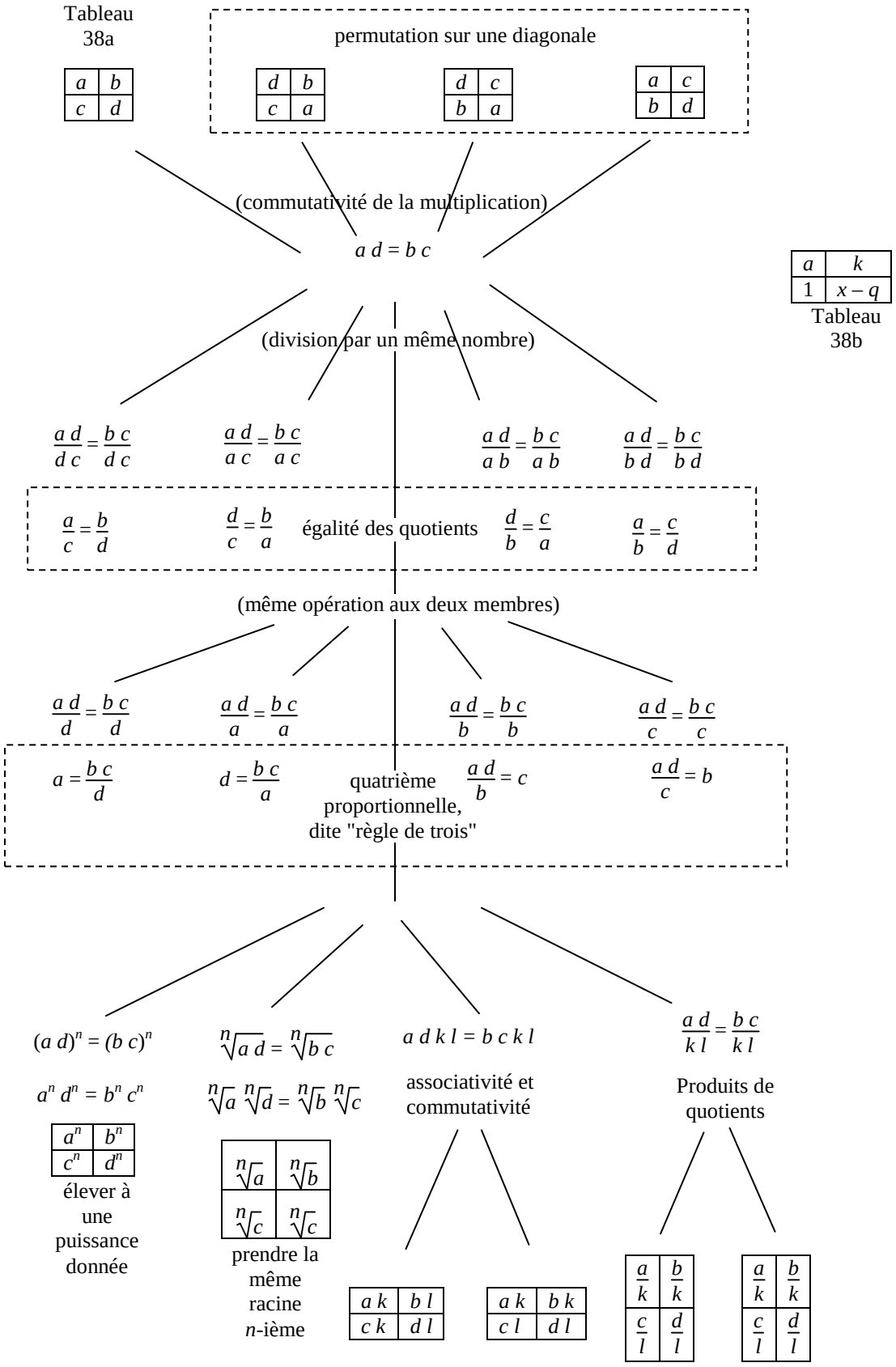


Tableau 38a
permutation sur une diagonale
(commutativité de la multiplication)
$a\,d = b\,c$
(division par un même nombre)
égalité des quotients
(même opération aux deux membres)
quatrième proportionnelle, dite "règle de trois"
élever à une puissance donnée
prendre la même racine n-ième
associativité et commutativité
Produits de quotients
Tableau 38b

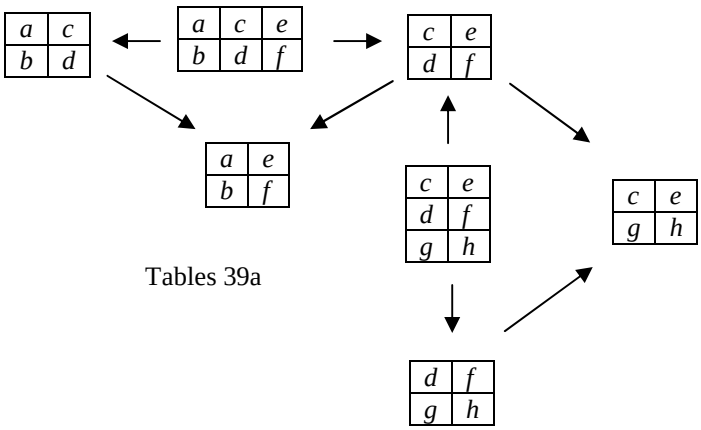
§39 Tableaux de proportion étendus

Note : tous les tableaux de la page ci-contre sont des tableaux de proportion.

1. L'égalité des quotients en ligne ou en colonne est transitive (tableaux 35a). De proche en proche on peut alors construire des tableaux de proportion étendus à un nombre quelconque de lignes ou de colonnes. De ces tableaux étendus on peut donc extraire des tableaux élémentaires de quatre valeurs.
2. Par exemple pour le tableau 35b on a d'après les cases en rouge la proportion du tableau 35c qui donne la quatrième proportionnelle $x = \frac{10 \times 45}{-10} = -45$.
3. **On peut augmenter le nombre des colonnes ou des lignes** : **tout tableau de quatre nombres extraits de ces tableaux étendus est un tableau de proportion**.
4. Le tableau 35d donne $\frac{a}{b} \ldots = \frac{e}{f} = q$ donc $a = b\,q \ldots$ et $e = f\,q$ donc

   $\alpha a \ldots + \varepsilon e = \alpha b\,q \ldots + \varepsilon f\,q = (\alpha b \ldots + \varepsilon f)\,q$ donc $\frac{a}{b} \ldots, \frac{e}{f}$ et $\frac{\alpha a \ldots + \varepsilon e}{\alpha b \ldots + \varepsilon f}$ ont tous la valeur q donc quelque soit le choix des coefficients $\alpha \ldots, \varepsilon$, on a la proportion du tableau 35e .
5. **Quand des quotients sont égaux entre eux, ils sont aussi égaux à une combinaison linéaire des numérateurs divisée par la même combinaison linéaire des dénominateurs**.

6.



Tables 39a

41	*x*	-20	45	*m*
7	– 3	2	*z*	6
π	10	22 *x*	– 10	5
17	20	–100	8	2

Table 39b

x	45
10	– 10

Table 39c

a	…	*e*
b	…	*f*

Table 39d

a	…	*e*	$\alpha\, a \ldots + \varepsilon\, e$
b	…	*f*	$\alpha\, b \ldots + \varepsilon\, f$

Table 39e

r	1
f(*r*)	*f*(1)

Table 39f

§40 Fonction continue et additive

7. Par définition, une fonction f est additive si $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
8. Par récurrence on démontre que $f(u \ldots + x) = f(u) \ldots + f(x)$.
9. Avec une soustraction $f(u - v) + f(v) = f(u - v + v) = f(u)$ et une algèbre donne $f(u - v) = f(u) - f(v)$.
10. $f(u) = f(u + 0) = f(u) + f(0)$ donne $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0\ f(1)$.
11. $f(1) = 1\ f(1)$ est trivial.
    Soit n un entier naturel autre que zéro et 1 : alors $n = 1 \ldots +1$ donc
    $f(n) = f(1 \ldots + 1)$ où 1 est écrit n fois = $f(1) \ldots + f(1)$ où $f(1)$ est écrit n fois= $n\ f(1)$. **Voilà pour *n* entier naturel**.
12. Ensuite pour tout entier relatif p on sait qu'il est une différence entre entiers naturels. Par exemple,
    si $p = u - v$ on a $f(p) = f(u) - f(v) = u\ f(1) - v\ f(1) = (u - v)\ f(1) = p\ f(1)$. **Voilà pour *p* entier relatif**.
13. On a $f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right)$ avec n entier relatif non nul donc

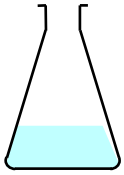
    $f(1) = f\left(\frac{1}{n}\text{ additionné } n \text{ fois}\right) = n$ additions de $f\left(\frac{1}{n}\right) = n\ f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\ f(1)$.
14. Un nombre rationnel q résulte d'une division d'un entier m par un entier n. Alors
    $f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = m\ f\left(\frac{1}{n}\right) = m\ \frac{1}{n}\ f(1) = q\ f(1)$. **Voilà pour *q* rationnel**.
15. Et dernière chose, on sait que chaque réel est aussi proche qu'on veut d'un nombre rationnel donc **à condition que *f* soit continue dans** $\mathbb{R}$, si un nombre rationnel q se rapproche d'un nombre réel donné r, la différence $r - q$ tend vers zéro, donc $0 = \lim_{q \to r} f(r - q) = \lim_{q \to r} \left[f(r) - q\ f(1)\right] = f(r) - \lim_{q \to r}\ q\ f(1)$ et une algèbre donne $\lim_{q \to r}\ q\ f(1) = f(r)$ donc, comme r est la limite de q on démontre que $r\ f(1) = f(r)$. **Voilà pour *q* réel .**

16. **Théorème : Si une fonction est continue et additive, alors le tableau des antécédents et des images est un tableau de proportion** (tableau 36a).

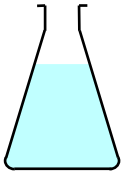
    Ce théorème est très intuitif : la fig. 36b et le tableau 36b le rendent presque trivial.

Proportion	
Antécédent	Image
x	$f(x)$
1	$f(1)$

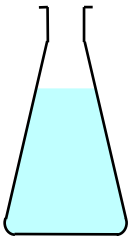
Tableau 40a
Fonction continue additive



300 ml
0,4 g de sucre



600 ml
0,8 g de sucre



900 ml
1,2 g de sucre

Fig. 40a
Fonction continue additive

	Gauche	Centre	Droite
Volume	300 ml	600 ml	900 ml
Sucre	0,4 g	0,8 g	1,2 g

Tableau 40b
Fonction continue additive

§41 L'usage des aires en géométrie plane

1. **Premier principe** : l'aire d'un rectangle est égale à la multiplication de sa longueur par sa largeur (fig. 37a).
2. **Deuxième principe** : l'aire de la réunion de deux figures est égale à la somme de leurs aires diminuée de l'aire de leur partie commune (fig. 37b).
3. **Conséquence** : l'aire du rectangle est égale à l'aire du parallélogramme (fig. 37c)
4. **Conséquence** : l'aire d'un triangle est invariante si un sommet de déplace parallèlement au côté qui lui est opposé (fig. 37d)
5. **Troisième principe** : deux figures de même forme et de mêmes dimensions ont même aire (fig. 37e).
6. **Conséquence** : on démontre le théorème de Pythagore sans écrire de formule (fig. 37f).
   L'aire du carré ACDI et du rectangle CHFE sont donc égales.
   Par analogie il en est de même des aires du carré ABPQ et du rectangle HBGF.
   La somme des aires des deux rectangles précédente est l'aire du carré CBGE ■
7. **Quatrième principe** : si un côté du rectangle est long d'une unité de longueur, l'aire est égale à la longueur de l'autre côté (fig. 37g) : $a\ 1 = 1\ a = a$.
8. **Cinquième principe** : l'aire d'une ligne est nulle (fig. 37h).
9. **Conséquence :** les aires et leurs propriétés admises à priori imposent aux nombres leurs règles algébriques.
   - Commutativité : les deux rectangles de la figure 37i sont égaux donc ont même aire : $a\ b = b\ a$.
   - Distributivité (figures 37j) : l'aire du grand rectangle est à la fois $a\ (b + c)$ et $a\ b + a\ c$. L'autre figure montre que $(a + b)\ c = a\ c + b\ c$.
   - Distributivité (figures 37k) : l'aire de la surface grise est à la fois $a\ (b – c)$ et $a\ b – a\ c$ et à la fois $(a – b)\ c$ et $a\ c – b\ c$.

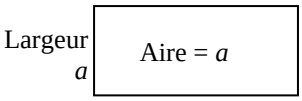


Fig. 41a

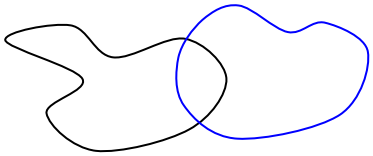


Fig. 41b

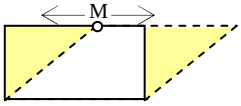


Fig. 41c : Quelle que soit la position de M les aires du rectangle et du parallélogramme sont égales

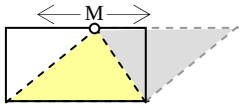


Fig. 41d : Quelle que soit la position de M l'aire du triangle jaune reste la même

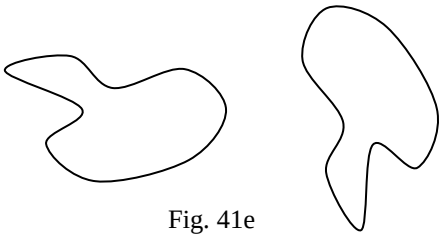


Fig. 41e

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Les aires des surfaces grises sont égales entre elles et égales à celles des surfaces jaunes.

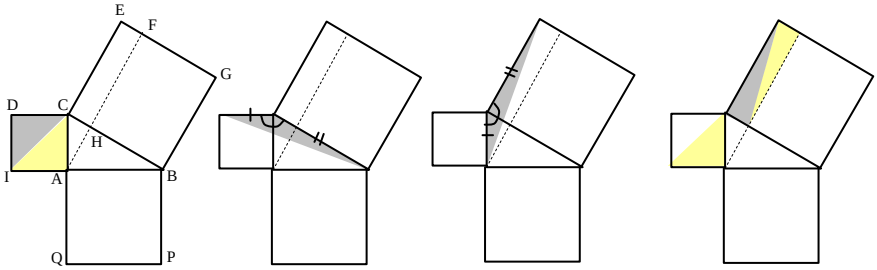


Fig. 41f : démonstration du théorème de Pythagore

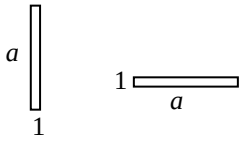


fig. 41g : élément neutre

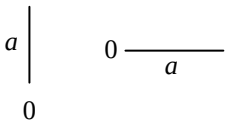


fig. 41h : élément absorbant

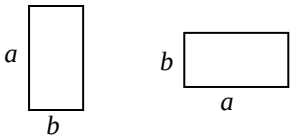
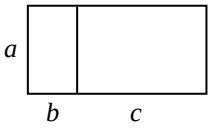


fig. 41i : commutativité



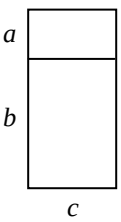


fig. 41j : distributivité

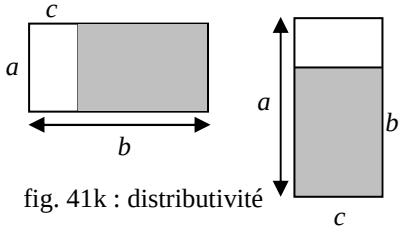


fig. 41k : distributivité

§42 Une invention mathématique importante : les vecteurs

1. **Idée initiale**
2. Soit un corps en translation (page 3) à une certaine vitesse constante représentée par une flèche. Une flèche a sa pointe et son empennage. La question ici est *où placer l'empennage de la flèche ?*
3. La réponse immédiatement intuitive est *sur un point dans la matière du corps*. Mais alors *lequel ?*
4. Aucun point du corps ne doit être privilégié, donc chaque point dans le corps peut être la position de l'empennage (fig. 38a). Les plus anciennes mentions de ce problème sont des grecs antiques Archimède (vers 200 av. J. C. en Sicile) et Héron (vers 50 ap. J. C. à Alexandrie).
5. Pour contourner cette difficulté, plusieurs scientifiques ont eu l'idée de donner un nom aux **ensembles de flèches qui ont toutes la même direction, le même sens et la même longueur**. Le Français Fresnel (vers 1820) l'avait proposé, mais fut très critiqué, le Britannique Hamilton (en 1843) proposa le mot latin *vector* et l'Allemand Grassmann (en 1844) finit par convaincre les scientifiques de l'intérêt pratique de l'idée : en France on adopta le mot *vecteur*.
6. Toutes les flèches grises de la figure 38a appartiennent au même vecteur, on dit alors que ce vecteur représente la translation. Deux de ses flèches choisies au hasard (A ; B) et (D ; C) dessinent manifestement un parallélogramme (fig. 38b). Nous admettrons que **deux flèches du même vecteur dessinent toujours un parallélogramme**.
7. **Écriture des vecteurs** : On a convenu d'écrire un vecteur par un ou plusieurs caractères surligné d'une fléchette. Par exemple le déplacement précédent est écrit au choix $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{DC}$.
8. Un avantage supplémentaire : **dans un repère donné, toutes les flèches d'un même vecteur ont les mêmes coordonnées** (fig. 38b).

9. **On dit que la vitesse et l'accélération sont des grandeurs physiques orientées.**
10. Un corps en translation dessine une infinité de flèches vitesse ou accélération (quand elles sont constantes) donc dessine en fait une translation particulière (page 3) représentée par un vecteur particulier, le **vecteur vitesse** et le **vecteur accélération**.

11. **Translations successives**
12. Suivons (figure 38c) un point matérialisé sur un corps lors de deux translations successives. Ce point occupe les positions successives A, B et K. Le bilan de ces translations est la flèche (A ; K). CHASLES popularisa l'idée déjà ancienne que la flèche (A ; K) résulte de l'addition de (A ; B) et de (B ; K). Mais comme ces flèches appartiennent aux vecteurs respectifs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK}$ on écrit la **relation de CHASLES**
13. $\boxed{\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}}$ (formule 28a).
14. Le fig. 38d montre pourquoi cette addition est **commutative**. En effet, la permutation du rôle des deux translations doit donner la même position finale.
15. On a les égalités $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et l'identité de Chasles
16. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.
17. On peut soustraire aux deux membres le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
18. $\boxed{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$ (Formule 28b).

19. **Multiplication d'un vecteur par un nombre**
20. Soit une flèche (A ; B). Elle gradue la droite passant par A et B, A étant l'origine et B le point d'abscisse 1. Soit q un nombre : il existe un point M sur la droite dont l'abscisse est q.
21. On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est la multiplication de $\overrightarrow{AB}$ par q (fig. 38d) et on écrit indifféremment
22. $\overrightarrow{AM} = q\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\,q$.

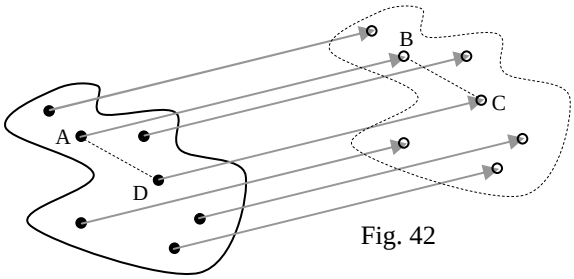


Fig. 42

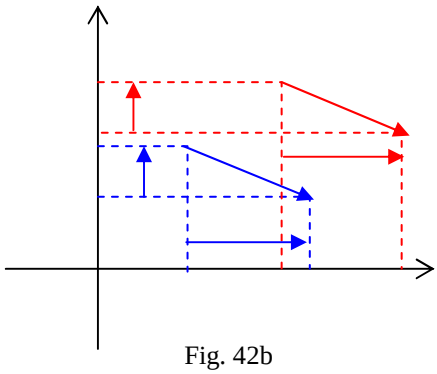


Fig. 42b

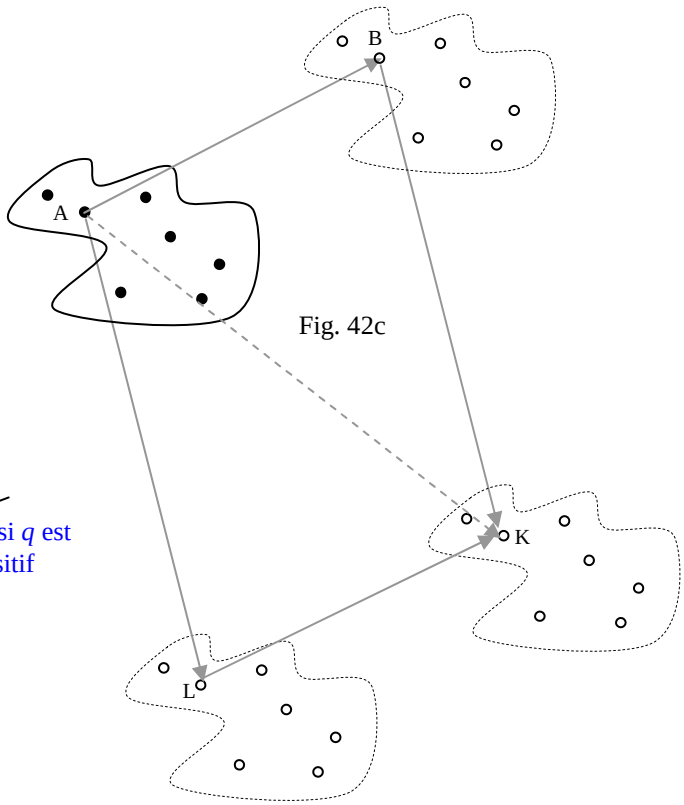


Fig. 42c

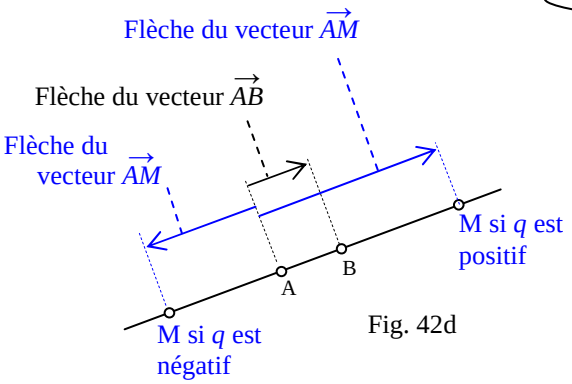


Fig. 42d

§43 Trigonométrie

1. Par application du théorème de Thalès, et pour mémoriser les quotients égaux entre longueurs de segments de la figure 39a, on dresse un tableau de proportion (tableau 39a) avec une colonne par sécante et une ligne par parallèle .

2. On en tire les relations de proportionnalité suivantes
(les références sont en haut à gauche des cases du tableau 39b).
Par exemple les quatre chiffres 2 sont dans quatre cases en rectangle. Si on les extrait, on obtient un tableau

Proportion	
r	x
1	$\cos a$

qui donne $x = r \cos a$.

Références	Formule
1	$\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$
2	$x = r \cos a$
3	$y = r \sin a$.
4	$X = R \cos a$
5	$Y = R \sin a$

3. La figure 39b montre aussi les relations $\boxed{\sin(-a) = -\sin a}$ et $\boxed{\cos(-a) = \cos a}$.

Le radian est défini à partir de la formule du périmètre du cercle $L = 2\pi R$ en choisissant un rayon d'une unité. Le tableau 39b donne des divisions les plus usitées du cercle.

4. Les cases prises 4 par 4 en rectangle ou en carré forment une proportion. Par exemple

5. $a_{\text{en radians}} = \dfrac{2\pi a_{\text{en degrés}}}{360}$ ou $a_{\text{en degrés}} = \dfrac{360 \times 60 \times 60\, a_{\text{en radians}}}{2\pi}$.

6. Le théorème de PYTHAGORE appliqué au triangle OCS donne $\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1}$.

Petits angles

7. Considérons un secteur OFS. Intéressons-nous au tableau 39c des grandeurs circulaires. L'aire des trois cercles de la fig. 39b cercle est πr^2, π et πR^2.
Alors on a les inégalités aire OCS $\leqslant$ aire secteur OFS $\leqslant$ aire OFT, donc
$\dfrac{1}{2}\sin a \cos a \leqslant \dfrac{1}{2} a_{\text{en radians}} \leqslant \dfrac{1}{2}\tan a$, donc
$\sin a \cos a \leqslant a_{\text{en radians}} \leqslant \dfrac{\sin a}{\cos a}$ donc, en multipliant les trois par $\dfrac{1}{\sin a}$: $\cos a \leqslant \dfrac{a_{\text{en radians}}}{\sin a} \leqslant \dfrac{1}{\cos a}$ donc on a
$1 \leqslant \lim_{a\to 0} \dfrac{a_{\text{en radians}}}{\sin a} \leqslant 1$ donc $\boxed{\lim_{a\to 0} \dfrac{a_{\text{en radians}}}{\sin a} = 1}$.

8. Une des formules 29a donne $\sin a = \tan a \cos a$ donc $1 \leqslant \lim_{a\to 0} \dfrac{a_{\text{en radians}}}{\tan a \cos a} \leqslant 1$ donc à la limite le cosinus vaut 1
donc il reste $\boxed{\lim_{a\to 0} \dfrac{a_{\text{en radians}}}{\tan a} = 1}$.

9. **Le côté pratique de ces résultats est que si l'angle *a* exprimé en radians est assez petit, il est numériquement assimilable à la fois à son sinus et à sa tangente** :
$\boxed{\sin a \approx \tan a \approx a_{\text{en radians}} \text{ quand } a \text{ est assez petit}}$.

10. Mais dans de nombreuses activités, l'angle est exprimé en degrés – notamment en astronomie – et la formule précédente devient $\boxed{\sin a \approx \tan a \approx \dfrac{2\pi a_{\text{en degrés}}}{360} \text{ quand } a \text{ est assez petit}}$.

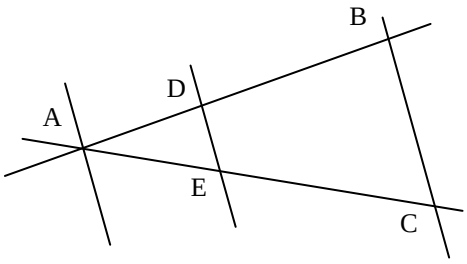


Fig. 43a

Proportion			
sécante ADB	sécante AEC	parallèles	Triangles
AD	*AE*	*DE*	AED
AB	*AC*	*BC*	ABC

Tableau 43a :
exploitation du principe de Thalès

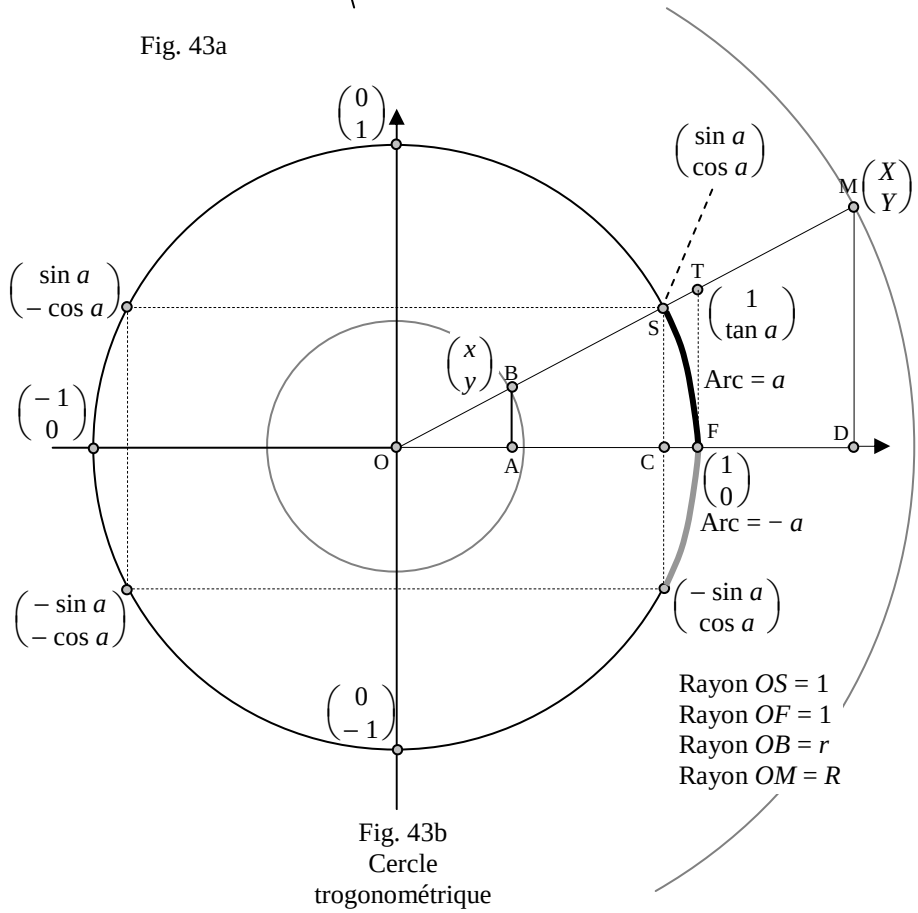


Fig. 43b
Cercle
trogonométrique

Proportion			
sécante OM (hypoténuses)	sécante OD (axe des abscisses)	parallèles	Triangles
[23] *OB* = *r*	[2] *OA* = *x*	[3] *AB* = *y*	OAB
[2345] *OS* = 1	[124] *OC* = cos *a*	[135] *CS* = sin *a*	OCS
OT	[1] *OF* = 1	[1] *FT* = tan *a*	OFT
[45] *OM* = *R*	[4] *OD* = *X*	[5] *DM* = *Y*	ODM

Tableau 43b

	Proportion							
	Tours	Radians	Degrés	Minutes	Secondes	Droits	Plats	Aires
Arc	a_{tour}	a_{rad}	$a_{degré}$	a_{min}	a_{sec}	a_{droit}	a_{plat}	Aire OFS
Cercle	1	2 π	360	360 x 60	360 x 60 x 60	4	2	π

Tableau 43c

§44 Théorème du cosinus et produit scalaire

1. **Écriture canonique des grandeurs triangulaires :** un sommet et l'angle intérieur associé sont désignés par la même lettre majuscule, la longueur du côté opposé est désigné par la lettre minuscule correspondante (fig. 40b).

2. **Loi du cosinus**
3. **C'est la généralisation du théorème de PYTHAGORE aux triangles quelconques permise par l'invention de la trigonométrie** (page 28) **:** $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A}$ (formule 30a).
4. Démonstration. Une double application du théorème de Pythagore donne $a^2 = (b - x)^2 + h^2$.
5. Une identité remarquable donne $a^2 = b^2 - 2\,b\,x + x^2 + (c^2 - x^2)$.
6. Mais (paragraphe 29) on a $\cos A = \dfrac{h}{c}$ donc $c \cos A = h$ et par substitution
7. $a^2 = b^2 - 2\,b\,c\cos A + c^2$ ■
8. Qui était al-Kashi (né à Kashan en Iran en 1380 et mort à Samarkand en 1429) ? Son nom complet est *Ghiyath ad-Din* (secours de la religion) *Jamshid* (le brillant) *Mas`ud* (heureux) *al-Kashi* (né à Kashan). C'était un mathématicien et astronome perse. Il est l'inventeur du cosinus. Totalement oublié pendant des siècles, son nom apparut dans les années 1990 dans les manuels scolaires édités en France. Les mots sinus et cosinus sont une invention ultérieure (Regiomontanus, *De triangulis planis et sphaericis libri*, 1561).

Produit scalaire

9. C'est une opération qui à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associe un nombre écrit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\vec{u}\,\vec{v}$.
10. Dans un triangle ABCA, si on considère les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ contenant respectivement les flèches (A ; B) et (A ; C), le produit scalaire de $\vec{AB}$ par $\vec{AC}$ est par définition $AB\,AC\cos(\vec{AB}\,;\,\vec{AC})$, soit $b\,c\cos A$ de sorte que ce produit puisse être calculé directement à partir des dimensions du triangle. En effet, dans la formule d'AL-KASHI, la soustraction du carré de a puis l'addition du double produit aux deux membres donne $2\,b\,c\cos A = b^2 + c^2 - a^2$. La division des deux membres par 2 donne $\boxed{\vec{AB}\,\vec{AC} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$.

11. **Angles aigus, droits et obtus**
12. Le produit scalaire peut aussi bien être positif, nul ou négatif.
13. - Si il est positif : la longueur a est petite donc l'angle A est **aigu** (fig. 40b).
14. Si il est nul alors on retrouve $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ donc, en additionnant la carré de a aux deux membres, on retrouve le théorème de PYTHAGORE qui montre que l'angle A est **droit** (fig. 40c).
15. Si il est négatif, la longueur a est grande donc l'angle A est **obtus** (fig. 40d).

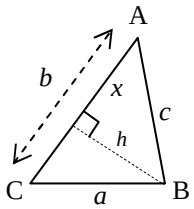


fig. 44a

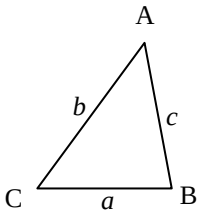


Fig. 44a

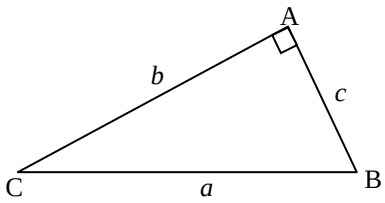


Fig. 44b

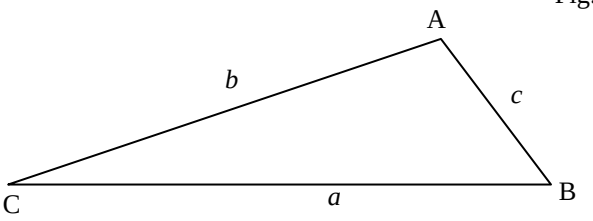


Fig. 44c

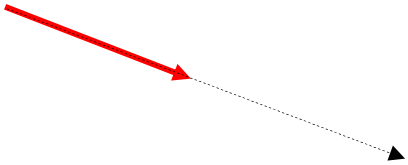
§45 Produit scalaire en coordonnées

Produit scalaire en coordonnées planes

1. Rappel (paragraphe 25) : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\cos A$ et
2. $AB\,AC\cos A$ est le **produit scalaire** de **AB** par **AC**.
3. Le **théorème de Pythagore** appliqué aux coordonnées (paragraphe 1) est
4. $\boxed{AB^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2}$ (formule 32a).
5. On a de même
6. $AC^2 = x_{AC}^2 + y_{AC}^2$ et $BC^2 = x_{BC}^2 + y_{BC}^2$.
7. Par substitution dans l'expression du théorème d'al-Kashi
8. $x_{BC}^2 + y_{BC}^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + x_{AC}^2 + y_{AC}^2 - 2\,\vec{AB}\,\vec{AC}$.
9. On décompose le vecteur $\vec{BC}$ à gauche selon la soustraction de Chasles paragraphe 24)
10. $x_{BC}^2 + y_{BC}^2 = (x_{AC} - x_{AB})^2 + (y_{AC} - y_{AB})^2 = x_{AC}^2 + x_{AB}^2 - 2\,x_{AC}\,x_{AB} + y_{AC}^2 + y_{AB}^2 - 2\,y_{BA}\,y_{AC}$.
11. On reporte :
12. $x_{AC}^2 + x_{AB}^2 - 2\,x_{AC}\,x_{AB} + y_{AC}^2 + y_{AB}^2 - 2\,y_{BA}\,y_{AC} = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + x_{AC}^2 + y_{AC}^2 - 2\,\vec{AB}\,\vec{AC}$.
13. ce qui met en évidence l'élimination de tous les carrés (en couleur), du signe moins devant les doubles produits et de leur multiplicateur 2 donc il reste
14. $\boxed{x_{AB}\,x_{AC} + y_{AB}\,y_{AC} = \vec{AB}\,\vec{AC}}$ (formule 32b) .

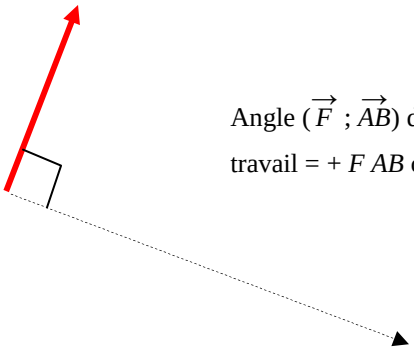
Produit scalaire en coordonnées dans l'espace

15. On peut tout répéter en ajoutant dans chaque ligne de formules une cote.
16. Le **théorème de Pythagore** appliqué aux coordonnées est
17. $AB^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2$ (formule 32c).
18. On a de même
19. $AC^2 = x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2$ et $BC^2 = x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2$.
20. Par substitution dans l'expression du théorème d'al-Kashi
21. $x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2 + x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2 - 2\,\vec{AB}\,\vec{AC}$.
22. On décompose le vecteur $\vec{BC}$ à gauche selon la soustraction de Chasles
23. $x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2 = (x_{AC} - x_{AB})^2 + (y_{AC} - y_{AB})^2 + (z_{AC} - z_{AB})^2$
24. $= x_{AC}^2 + x_{AB}^2 - 2\,x_{AC}\,x_{AB} + y_{AC}^2 + y_{AB}^2 - 2\,y_{AC}\,y_{AB} + z_{AC}^2 + z_{AB}^2 - 2\,z_{AC}\,z_{AB}$.
25. On reporte :
26. $x_{AC}^2 + x_{AB}^2 - 2\,x_{AC}\,x_{AB} + y_{AC}^2 + y_{AB}^2 - 2\,y_{AC}\,y_{AB} + z_{AC}^2 + z_{AB}^2 - 2\,z_{AC}\,z_{AB}$
$= x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2 + x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2 - 2\,\vec{AB}\,\vec{AC}$.
27. ce qui donne l'élimination de tous les carrés (en couleur) et du signe moins devant les doubles produits : il reste
$\boxed{x_{AB}\,x_{AC} + y_{AB}\,y_{AC} + z_{AB}\,z_{AC} = \vec{AB}\,\vec{AC}}$ (formule 32 d) .
28. Un travail (paragraphe 11) est donc un produit scalaire, celui d'un vecteur $\vec{F}$ représentant la force par le vecteur $\vec{AB}$ auquel appartient une flèche déplacement $(A\,;\,B)$. Or le produit scalaire $\vec{F}\,\vec{AB}$ est aussi donné par la formule $\vec{F}\,\vec{AB} = F \cdot AB\cos(\vec{F}\,;\vec{AB})$ (formule 32 e), ce qui, en mécanique nous donne des informations précieuses.
29. Dans les figures page suivante, la force est en trait continu rouge et le déplacement en tirets. Divers types de travaux sont présentés.
30. Un cas particulier intéressant est quand les deux côtés mesurent chacun une unité de longueur car alors sur un plan $\boxed{x_{AB}\,x_{AC} + y_{AB}\,y_{AC} = \cos(\vec{AB},\vec{AC})}$ et dans l'espace $\boxed{x_{AB}\,x_{AC} + y_{AB}\,y_{AC} + z_{AB}\,z_{AC} = \cos(\vec{AB},\vec{AC})}$.



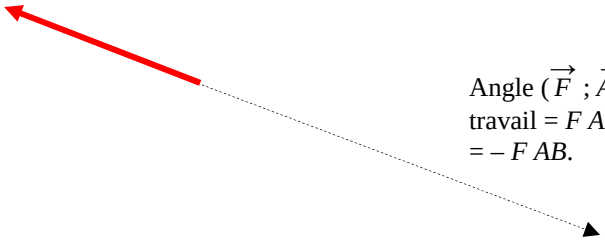
Angle ($\overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{AB}$) nul, travail = $F\,AB$ cos 0 = + $F\,AB$.

Fig. 45a : **ce travail est moteur.**



Angle ($\overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{AB}$) droit, travail = + $F\,AB$ cos $\frac{\pi}{2}$ nul.

Fig. 45b : **c'est un glissement parfait.**



Angle ($\overrightarrow{F}$; $\overrightarrow{AB}$) plat, travail = $F\,AB$ cos π = – $F\,AB$.

Fig. 45c : **ce travail est résistant.**

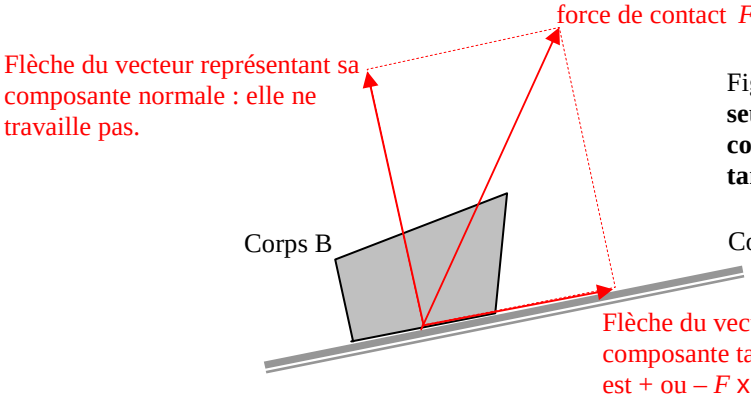


Fig. 45d : **seule la composante tangentielle**

§46 Théorème du sinus

1. La figure 42a montre que le rectangle (trait noir) et le parallélogramme (surface grise) ont même aire.
2. **Quand un côté de parallélogramme glisse le long de lui-même, son aire ne change pas.**

3. La figure 42b montre que l'aire du triangle (surface grise) est égale à la moitié de celle du parallélogramme (trait noir).

4. **Quand un sommet de triangle glisse le long d'une parallèle au côté opposé, son aire ne change pas.**

5. Sur la figure 42c, l'aire du triangle rectangle (surface grise) est égale à l'aire du triangle quelconque (trait noir), mais aussi à la moitié de l'aire du rectangle (en tirets). Cette aire est égale à la multiplication des longueurs des deux côtés, la base et la hauteur. L'aire du triangle quelconque est donc égale à la multiplication de la longueur de la base par celle de sa hauteur (en ligne tiret-point).
6. **L'aire d'un triangle est égale à la moitié de la multiplication de la longueur d'un côté par celle de la hauteur issue du sommet opposé**.

7. En trigonométrie (paragraphe 29) on a $\frac{h}{c} = \sin B$.

8. L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} a\, h$ donc est $\frac{1}{2} a\, c \sin B$.
9. En permutant circulairement les rôles des côtés et des angles il vient deux autres formules de l'aire du triangle, donc $a\, c \sin B = c\, b \sin A = b\, a \sin C$.
10. Une division de ces trois grandeurs égales par $a\, b\, c$ donne le **théorème des sinus**
$\boxed{\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}}$ (formule 33).

11. Pour un triangle ABC isocèle en A (fig. 42e), on a $b = c = R$ donc son aire est $\frac{1}{2} R^2 \sin A$.
12. Soit AH sa hauteur issue de A : les triangles AHB et AHC sont rectangles et le théorème de Pythagore donne HB^2 et $HC^2 = R^2 - AH^2$ donc HB = HC donc H est le milieu de BC donc la hauteur est en même temps une médiane.
13. Les deux triangles ont les trois côtés homologues égaux, donc sont égaux donc les angles homologues sont égaux donc $B = C$ et les angles HAB et HAC valent la moitié de A.
14. Dans ces mêmes triangles rectangles $AH = R \cos A/2$ et $HB = HC = a/2 = R \sin A/2$.
15. L'aire de ABC est donc le double donc $2 \frac{1}{2} R \sin A/2 \cdot R \cos A/2 = R^2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$.
16. On en déduit l'expression trigonométrique du doublement d'un angle $\frac{1}{2} \sin A = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$.

Fig. 46a

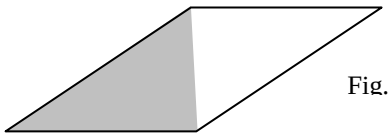


Fig. 46b

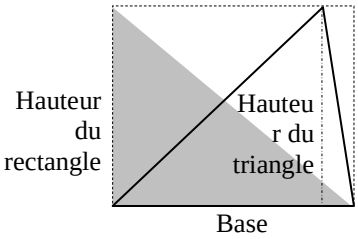


Fig.46c

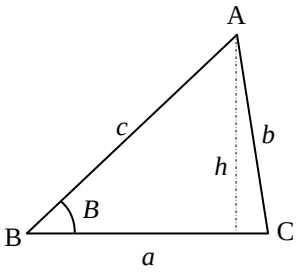


Fig. 46d

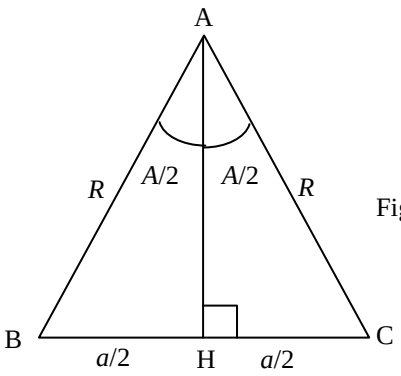


Fig. 46e

§47 Aire du triangle en coordonnées en deux dimensions

1. L'aire *S* du triangle ABC de la figure 43a est la différence entre l'aire du rectangle IJCK qui l'enveloppe et la somme des trois aires *a*, *b* et *c* respectivement des triangles AIB, BJC et CKA. Ces aires sont sensées être toutes positives et il faut tenir compte du sens des flèches indiquent les coordonnées des flèches des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$.
2. Aire ABC = aire IJCK – aire AIB – aire BJC – aire CKA,
   Aire IJCK = $X' (Y' - Y) = \cancel{X' Y'} - X' Y$,
   Aire AIB = $\frac{1}{2} X (-Y) = -\frac{1}{2} \cancel{X Y}$,
   Aire BJC = $\frac{1}{2} (X' - X) (Y' - Y) = \frac{1}{2} (\cancel{X' Y'} - X' Y - X Y' + \cancel{X Y})$,
   Aire CKA = $\frac{1}{2} \cancel{X' Y'}$.
3. La somme algébrique de l'al. 2 élimine les calculs barrés et il reste
   Aire ABC = $-X' Y - \frac{1}{2}[-X' Y - X Y'] = -X' Y + \frac{1}{2} X' Y + \frac{1}{2} X Y' = \frac{1}{2} X Y' - \frac{1}{2} X' Y = \frac{1}{2}[X Y' - X' Y]$ et on résume :
   Aire ABC = $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix}$. Le petit tableau multipliant $\frac{1}{2}$ s'appelle un **déterminant**. Il signifie *multiplication en diagonale principale moins la multiplication en diagonale secondaire*.
4. Le mot *déterminant* est choisi car il permet de savoir si les points I, J et C sont alignés ou non. En effet, en cas d'alignement, le triangle IJC est aplati donc l'aire est nulle donc le déterminant est nul et réciproquement.
5. Note sur le signe : $X Y' > 0$, $Y X' < 0$ donc $-Y X' > 0$ donc l'aire de ABC est comptée positivement. Notons aussi que la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ précède celle des coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ donc l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est orienté dans le sens trigonométrique positif. Enfin, permuter les deux vecteurs change le signe à la fois du sinus et du déterminant.
6. Que signifie ce signe ? Il faut regarder en trois dimensions (fig. 43b) et imaginer que le triangle est sur le plan xy d'un repère de l'espace Oxyz. L'aire est représentée par une des trois flèches grises (dans le cas où elle est positive) qui appartiennent à un même vecteur $\overrightarrow{s}$, le **vecteur aire**. Il est alors nécessaire de choisir une échelle (tableau 43a) s **cm²** $= \frac{e \textbf{ cm}^2 \cdot s \textbf{ cm}}{1 \textbf{ cm}}$. Ici, *e* est le facteur d'échelle.
7. On peut reformuler le résultat en renommant les coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_{AC} \\ y_{AC} \end{pmatrix}$ et alors
   $\boxed{\text{aire ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix}}$ et, si les côtés font une unité de longueur $\boxed{\sin A = \begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix}}$.
   L'aire du parallélogramme ABDC est le double de celle du triangle ABC, donc $\boxed{\text{aire ABDC} = \begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix}}$.
8. Un cas particulier intéressant est quand les côtés *AB* et *AC* valent chacun une unité de longueur. Dans ce cas l'aire de ABC est à la fois (§43) $\frac{1}{2} \sin A$ et $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix}$ donc $\sin A = \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix}$.

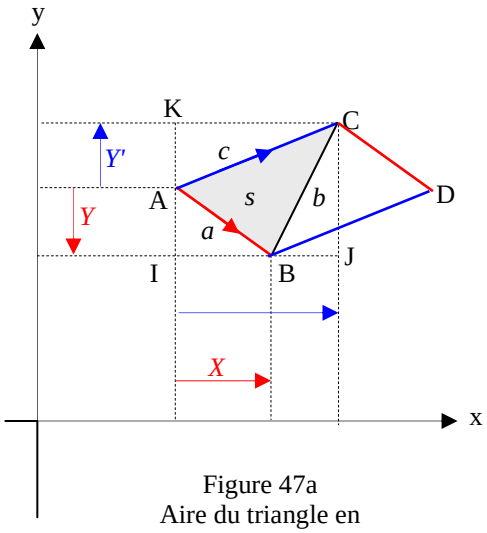


Figure 47a
Aire du triangle en
coordonnées planes

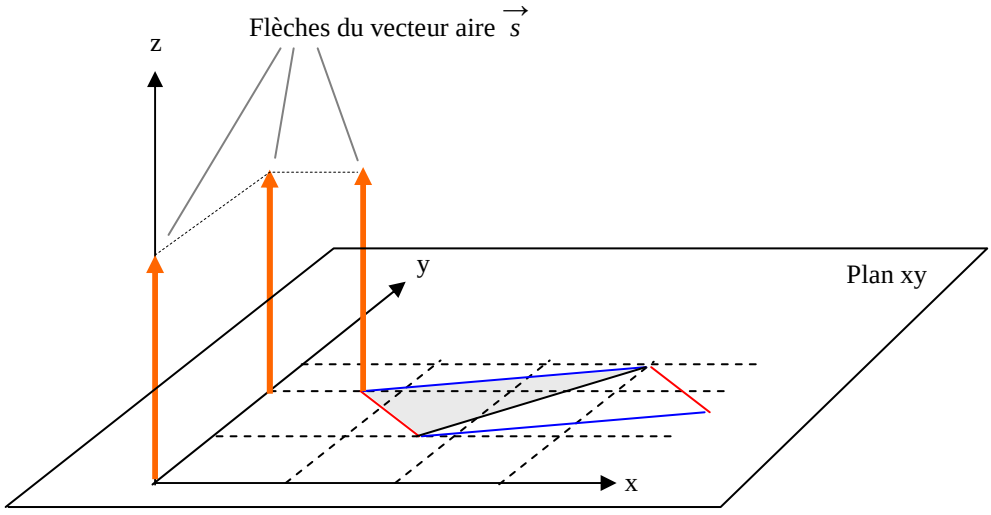


Fig. 47b :
aire plane dans l'espace

Unités de surface	Unité de longueur
e **cm**^{2}	1 **cm**
s **cm**^{2}	*s* **cm**

Tableau 47a
échelle entre aires et

7 Au-delà du collège

§48 Parallaxe en astronomie

1. Dans ce qui suit, on appellera *observatoire* un lieu où se tient des astronome et *astre* un objet du ciel qui les intéresse , étoile à 4 branches).
2. En astronomie, la parallaxe (fig.44a) est l'angle p sous lequel l'astre A peut être vue depuis un astre (silhouette de saturne) la longueur entre deux l'observatoires A et B (silhouettes).
3. Pour les astres du système solaire, L est la longueur d' une corde séparant deux observatoires (*parallaxe diurne*).
4. Pour les astres extérieurs au système solaire, L est le demi grand axe de l'orbite terrestre autour du Soleil, soit une unité astronomique (*parallaxe annuel*).
5. Un objet E est assez lointain pour pouvoir assimiler les droites (pan) et (pas) comme parallèles.

Parallaxe diurne (fig. 44a et tableau 44a)

En bleu sont écrites les valeurs mesurables.

La somme des angles d'un puis est π.

6. Ttriangle ABC : $p + \alpha + \alpha' + \beta + \beta' = \pi$. L'objectif des mesures et des calculs est l'angle $p = \pi - (\alpha + \alpha' + \beta + \beta')$.
7. Triangle ABS : $\phi_s + \phi_n + n + s = \pi$. Seuls n et s sont directement mesurables. Alors $2\,\phi_s = \pi - n - s = \pi - (n + s)$.

   En trigonométrie, $\sin \phi_s = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{n+s}{2}\right] = \cos\frac{n+s}{2}$.

Deux angles sont complémentaires (leur somme est un angle droit)

8. Autour du sommet A : $\alpha + \phi_s = \frac{\pi}{2}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi_s$ donc $2\,\alpha = \pi - 2\,\phi_s$ et par analogie $2\,\beta = \pi - 2\,\phi_n$.

Cas d'un objet proche (satellite)

9. Le triangle ABC est isocèle en C donc ϕ_s et ϕ_n sont égaux donc (al. 8) α et β sont égaux.
10. L'al. 6 et 9 donne $p = \pi - (2\,\alpha + \alpha' + \beta')$.
11. L'al. 9, 8 et 7 donnent : $2\,\alpha$ et $2\,\beta = \pi - (\pi - n - s) = n + s$.
12. L'al. 10 et 13 donnent $p = \pi - (n\tau + \alpha' + \beta') = \pi + \alpha' + \beta' - (n + s)$ qui a même sinus que $n + s - (\alpha' + \beta')$.

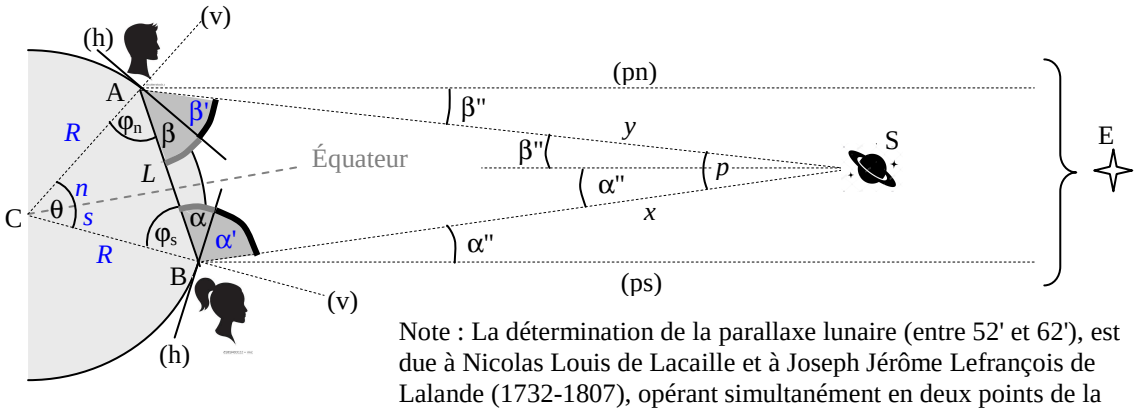
Théorème du sinus

13. Triangle ABS : $\frac{x}{\sin(\beta + \beta')} = \frac{L}{\sin p} = \frac{L}{1}\frac{1}{\sin p}$ donc (al.11) $x = L\frac{1}{\sin p}\sin\left[\frac{n+s}{2} + \beta'\right]$.
14. Triangle ABC : $\frac{L}{\sin(n+s)} = \frac{R}{\sin\phi_s} = $ (al. 7) $\frac{R}{\cos\frac{n+s}{2}}$. Alors $L = \frac{R}{\cos\frac{n+s}{2}}\sin(n+s)$.
15. Le théorème de l'angle double donne $L = 2\,\frac{R}{\cos\frac{n+s}{2}}\sin\frac{n+s}{2}\cos\frac{n+s}{2} = 2\,R\,\mathrm{in}\,\frac{n+s}{2}$.
16. L'al. 13 et 15 donnent $\boxed{x = 2\,R\sin\frac{n+s}{2}\frac{1}{\sin(n+s-(\alpha'+\beta'))}\sin\left[\frac{n+s}{2} + \beta'\right]}$.
17. Par analogie (y à la place de x et α' à la place de β') $\boxed{y = 2\,R\sin\frac{n+s}{2}\frac{1}{\sin(n+s-(\alpha'+\beta'))}\sin\left[\frac{n+s}{2} + \alpha'\right]}$.

Cas d'un objet lointain (Lune et planètes solaires)

18. Les paires d'angles α'' et β'' sont alternes internes. On a donc simplement $p = \alpha'' + \beta''$. On a donc $\boxed{x = 2\,R\sin\frac{n+s}{2}\frac{1}{\sin(\alpha''+\beta'')}\sin\left[\frac{n+s}{2} + \beta'\right]}$. Par analogie $\boxed{y = 2\,R\sin\frac{n+s}{2}\frac{1}{\sin(\alpha''+\beta'')}\sin\left[\frac{n+s}{2} + \alpha'\right]}$.
19. Pour les objets lointains, les parallaxes sont très petits donc leur sinus peut être confondu avec l'angle en radians.

20.



Note : La détermination de la parallaxe lunaire (entre 52' et 62'), est due à Nicolas Louis de Lacaille et à Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande (1732-1807), opérant simultanément en deux points de la surface de la Terre très éloignés l'un de l'autre.

Symbole	*R*	*n*	*s*	α'	β'	α"	β"	*L*	*p*
Grandeur	Rayon terrestre	Lat. n.	Lat. s.	Déc. s.	Déc. n.	Déc. s.	Déc. n.	Corde	Paral.
Statut	Mes	Mes	Mes	Mes	Mes	Mes	Mes	Calc	Calc

Abréviations :
Mes = mesuré
Calc = calculé
Lat. = latitude
n. = nord
s. = sud
Déc. = déclinaison
Paral. = parallaxe

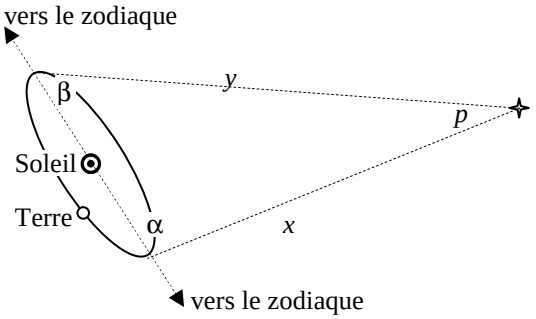
Fig. 48a

(h) = lignes horizon
(v) = verticale locale
(pn) = quasi-parallèle nord
(ps) = quasi-parallèle sud

Fig. 48b

Parallaxe annuel

Le problème est beaucoup plus simple. Ici, *L* est la longueur du grand axe de l'ellipse supposée être la trajectoire de la Terre autour du Soleil. Les distances *x* et *y* séparent notre planète de l'objet étudié, cet objet étant hors du système solaire. Les angles α et β sont directement mesurés.



	Proportion des **unités circulaires**						
Unité	Tours	Radians	Degrés	Minutes d'arc	Secondes d'arc	Minutes horaire	Secondes horaire
Arc	a_T	a_R	a_D	a_{Ma}	a_{Sa}	a_{Mh}	a_{Sh}
Cercle	1	2 π	360	360 x 60	360 x 60 x 60	24 x 60	24 x 60 x 60

Tableau 48b pour les conversions d'unités d'angle

$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin p}$ et $p = \pi - (\alpha + \beta)$ donnent $x = \sin\beta \frac{L}{\sin p} \approx \sin\beta \frac{L}{p_r}$ avec $p_R = 2\pi \frac{p_{Sa}}{360 \times 60 \times 60}$.

Note : le tableau 44b permet les conversions d'unités d'arc ou d'angle. Par exemple les colonnes "radians" et "mn horaire" donnent la formule $a_r = \frac{24 \times 60\ a_{Mh}}{2\pi}$.

§51 Détection d'une exoplanète

9.

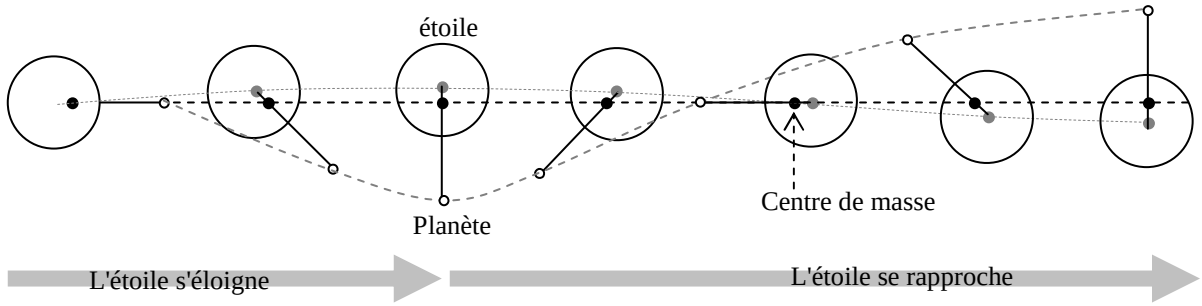


Fig. 51a :
détection d'une exoplanète par le balourd

§52 Aire du triangle en coordonnées en trois dimensions

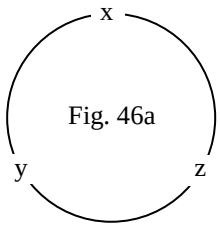


Fig. 46a

1. La projection (figure 46b) d'un triangle ABC sur un des plans xy, yz ou zx est un triangle nommé respectivement $A_zB_zC_z$, $A_xB_xC_x$ et $A_yB_yC_y$.
2. Notons dans cette dénomination la succession circulaire des lettres x, y et z (figure 46a). Ainsi les plans sont successivement désignés xy, yz et zx et, par exemple le plan nommé yz porte le triangle $A_xB_xC_x$.
3. On sait calculer à partir des coordonnées les aires des triangles $A_zB_zC_z$, $A_xB_xC_x$ et $A_yB_yC_y$. Ces aires sont portées sur les axes de même nom. Par exemple l'aire de $A_xB_xC_x$ est nommée S_x.
4. Les points I, J et K ont les coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$ ont ces mêmes coordonnées.
5. On se servira des coordonnées $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ de $\overrightarrow{AB}$ et $\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ de $\overrightarrow{AC}$.
6. Considérons (flèches rouges et solide en hachures grises) le vecteur $\overrightarrow{S}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}S_x\\S_y\\S_z\end{pmatrix}$.

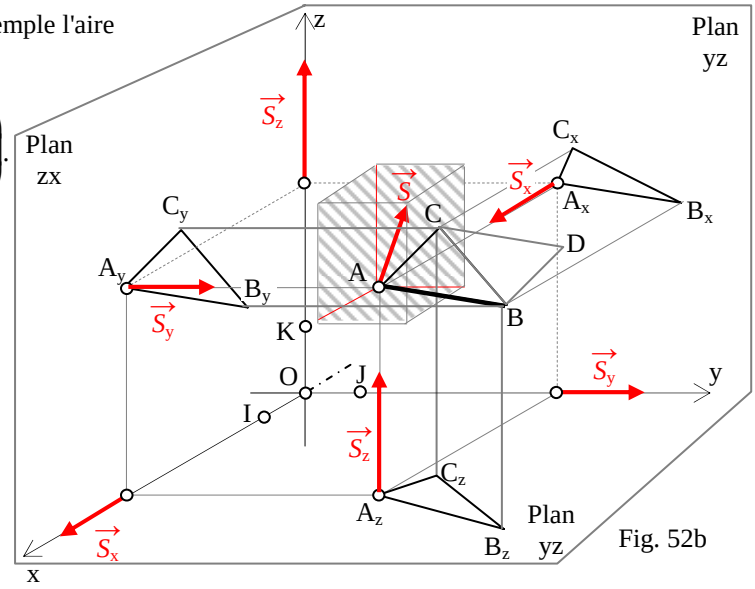


Fig. 52b

7. Les produits scalaires $\overrightarrow{OI}\ \overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{OJ}\ \overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{OK}\ \overrightarrow{S}$ valent respectivement S_x, S_y et S_z.
8. Les mêmes produits scalaires valent $S\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{S})$, $S\cos(\overrightarrow{OJ}\ \overrightarrow{S})$ et $S\cos(\overrightarrow{OK}\ \overrightarrow{S})$.
9. On peut facilement écrire les formules des aires des triangles $A_zB_zC_z$, $A_xB_xC_x$ et $A_yB_yC_y$

$$S_z=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}X & X'\\ Y & Y'\end{vmatrix},\ S_x=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}Y & Y'\\ Z & Z'\end{vmatrix},\ S_y=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}Z & Z'\\ X & X'\end{vmatrix}.$$

10. Un calcul démontre que les deux produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{S}$ sont nuls. Cela signifie que les flèches de $\overrightarrow{S}$ sont perpendiculaires au plan du triangle ABC, ce qui n'apparaît pas nettement sur la figure 46b.

11. Le carré de $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z'$ donne après développement $X^2\,X'^2 + Y\,Y'^2 + Z\,Z'^2$ $+ 2\,X\,X'\,Y\,Y' + 2\,X\,X'\,Z\,Z' + 2\,Y\,Y'\,Z\,Z'$.
12. Le carré de $2\,S_z$ donne $X^2Y'^2 + Y^2\,X'^2 - 2\,X\,Y'\,Y\,X'$, celui de $2\,S_x$ donne $Y^2\,Z'^2 + Z^2\,Y'^2 - 2\,Y\,Z'\,Z\,Y'$ et celui de $2\,S_x$ donne $Z^2\,X'^2 + X^2\,Z'^2 - 2\,Z\,X'\,X\,Z'$.
13. La somme des résultats des alinéas 11 et 12 élimine les doubles produits.
14. La somme des termes restants est factorisable en multiplication de $X^2+Y^2+Z^2$ par $X'^2+Y'^2+Z'^2$, c'est-à-dire par la multiplication des carrés des longueurs *AB* et *AC*.
15. On a alors $\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\right]^2 + [2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2 = AB^2\,AC^2$.
16. Une division par les carrés des longueurs donne $\dfrac{\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\right]^2}{AB^2\,AC^2} + \dfrac{[2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2}{AB^2\,AC^2} = 1.$
17. On sait que le quotient du produit scalaire par le produit des longueurs est le cosinus de l'angle entre les flèches de $\overrightarrow{AB}$ et celles de $\overrightarrow{AC}$.
18. En conséquence, $(AB\,AC\cos A)^2 + \dfrac{[2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2}{AB^2\,AC^2} = 1.$
19. On sait donc que $\dfrac{[2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2}{AB^2\,AC^2}$ est le carré du sinus de l'angle *A*.
20. On conclut que $[2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2 = AB^2\,AC^2 \sin^2(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})$ qui est le carré de $AB\,AC \sin(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})$.
21. On sait que $AB\,AC \sin(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})$ est le double de l'aire du triangle ABC, donc est l'aire du parallélogramme ABDC.
22. On sait donc que $[2\,S_x]^2 + [2\,S_y]^2 + [2\,S_z]^2$ est le carré de l'aire de ABDC.
23. En substituant les aires S_x , S_y et S_z les multiplicateurs 2 disparaissent (al. 9) et il reste
$\left|\begin{matrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} Z & Z' \\ X & X' \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} X & X' \\ Y & Y' \end{matrix}\right|^2$ = carré de l'aire de ABDC.

Mais à gauche on a (al. 22) l'expression de Pythagore de la longueur des flèches de $2\overrightarrow{S}$ d'où cette interprétation (fig. 46b) : le vecteur $2\overrightarrow{S}$ est le vecteur aire du parallélogramme ABDC.

24. Cette théorie des aires en trois dimensions a induit la définition d'une nouvelle opération entre vecteurs : $2\overrightarrow{S}$ résulte de la **multiplication** dite **vectorielle** (parce que le résultat est un vecteur), désignée par le signe $\wedge$ ou le signe $\times$ selon les auteurs du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} X\,Y' - Y\,X' \\ Y\,Z' - Z\,Y' \\ Z\,X' - X\,Z' \end{pmatrix}$.
25. La dernière formule s'écrit aussi $\begin{pmatrix} \left|\begin{matrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{matrix}\right| \\ \left|\begin{matrix} Z & Z' \\ X & X' \end{matrix}\right| \\ \left|\begin{matrix} X & X' \\ Y & Y' \end{matrix}\right| \end{pmatrix}$. Cette écriture met en évidence la permutation circulaire des coordonnées (fig. 46a) : on lit les colonnes de gauche, et on pense "X est donné par Y et Z, Y est donné par Z et X et Z est donné par X et Y".

§53 Calcul d'un volume à partir des coordonnées

1. Voici une proposition de géométrie dans l'espace un peu difficile (fig. 47a).
2. Le parallélogramme MNPQ est une translation de EFGH sur lui-même.
3. En conséquence, les surfaces EMIH et GPJN sont égales.
4. De même EMJF et GPQI sont égales.
5. Les solides AD-EMIH et CB-GJNP sont égaux.
6. De même AB-EMJF et CD-GPQI sont égaux.
7. Par réunion homologues, les solides jaune et bleu sont égaux, donc ont même volume.
8. Du solide ABCD-EFGH ou passe à ABCD-MNPQ en enlevant le solide jaune et en ajoutant le solide bleu.
9. En conséquence, le volume de ABCD-MNPQ est égal au volume de ABCD-EFGH.
10. Le parallélépipède est sensé être droit, c'est-à-dire que l'angle AEM est droit.
11. En trigonométrie $AE = AM \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AM})$.
12. Le volume d'un parallélépipède droit (la base ABCD est un parallélogramme quelconque mais le segment EA lui est perpendiculaire.
13. Le volume est égal à l'aire de la base multipliée par la hauteur donc le volume de ABCD-EFGH est égal à l'aire de ABCD multipliée par AE.
14. Vu l'alinéa 9, le volume de ABCD-MNPQ est égal à l'aire de ABCD multipliée par $AM \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AM})$
15. En conséquence, ce volume est le produit scalaire de $\overrightarrow{AE}$ par $\overrightarrow{AM}$.
16. L'aire de ABCD est égale à $AB\ AC \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
17. En conséquence, le volume de ABCD MNPQ est égal à $AB\ AD\ AM \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AM})$.
18. On sait que $\overrightarrow{AE}$ est le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AD}$.
19. On conclut que le volume de ABCD-MNPQ est donné par la formule $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AM}$.
20. Définissons les coordonnées des trois vecteurs contenant les arêtes issues de A du parallélépipède ABCD-MNPQ, le solide étant orienté n'importe comment par rapport au trois axes du repère orthonormé de l'espace : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix}$.
21. Le produit vectoriel est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ d'abscisse $\begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix}$, d'ordonnée $\begin{vmatrix} Z & Z' \\ X & X' \end{vmatrix}$ et de cote $\begin{vmatrix} X & Y' \\ Y & Z' \end{vmatrix}$.
22. La formule du volume est donc $\begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix} X'' + \begin{vmatrix} Z & Z' \\ X & X' \end{vmatrix} Y'' + \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} Z''$.
23. Le développement des déterminants donne $(Y\,Z' - Z\,Y')\,X'' + (Z\,X' - X\,Z')\,Y'' + (X\,Y' - Y\,X')\,Z''$.
24. Le développement donne $Y\,Z'\,X'' + Z\,X'\,Y'' + X\,Y'\,Z'' - Z\,Y'\,X'' - X\,Z'\,Y'' - Y\,X'\,Z''$.
25. Une astuce permet de mémoriser facilement cette somme algébrique de multiplications (tableau 38a). Les trois premières lignes portent les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM}$ dans cet ordre. Les deux premières lignes sont ensuite répétées. Pour les produits additionnés, suivre les flèches rouges et pour les soustraits les flèches bleues (figure 47b).
26. Mais l'écriture standard se contente du tableau 38b (déterminant 3 sur 3).

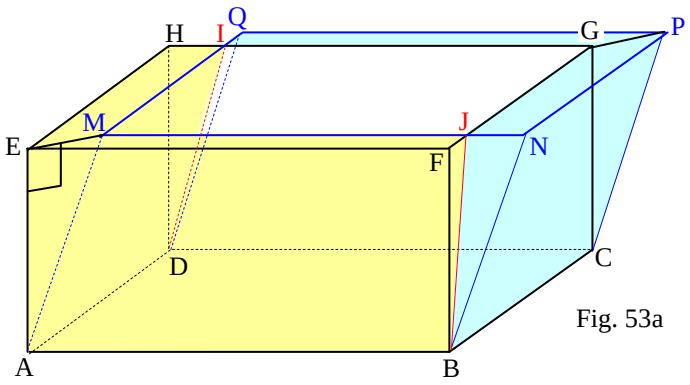


Fig. 53a

Démonstration de l'al. 3

27. Surfaces de l'al. 3 : IQ = FJ, MQ = FG.
28. donc par différence MI = MQ – IQ = FG – FJ = JG.,
29. HJ = JN, HE = PN, et les segments EH, MI, JG et PN sont parallèles.
30. En conséquence les surfaces EMIH et GPJN sont égales.

Démonstration de l'al. 4

31. La démonstration est analogue pour EMJF et GPQI.

Démonstration de l'al. 5

32. AD = BC donc les solides AD-EMIH et CB-GJNP sont égaux.

Démonstration de l'al. 6

33. La démonstration est analogue pour AB-EMJF et CD-GPQI.

Démonstration de l'al. 7

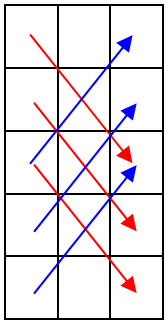
34. On réunit d'une part les solides AD-EMIH avec AB-EMJF (en jaune) et CB-GJNP avec CD-GPQI (en bleu).

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Tableau 53c
numérotation
des lignes et
des colonnes

X	*X'*	*X''*
Y	*Y'*	*Y''*
Z	*Z'*	*Z''*
X	*X'*	*X''*
Y	*Y'*	*Y''*

Tableau
53a



X	*X'*	*X''*
Y	*Y'*	*Y''*
Z	*Z'*	*Z''*

Tableau 53b

§54 Fonction additive continue de plusieurs variables

17. Énoncé : soit une fonction f dont l'antécédent est une suite de nombres $(u \dots , z)$. L'image est écrite en principe $f((u \dots , z))$, mais la double paire de parenthèses emboîtée est encombrante et on a pris l'habitude d'enlever une paire. L'image s'écrira donc $f(u \dots , z)$.

18. On a aussi une autre écriture possible : mettre les variables en colonne. Ainsi $f(u \dots , z)$ est écrit $f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$. Cette écriture en colonne rend beaucoup de formules plus lisibles (alinéas suivants).

19. Par définition, une fonction f est additive si $f\begin{pmatrix} u+u' \\ \dots \\ z+z' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} u' \\ \dots \\ z' \end{pmatrix}$.

20. Par récurrence, on démontre que $f\begin{pmatrix} u_1 \dots + u_n \\ \dots \\ z_1 \dots + z_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ z_1 \end{pmatrix} \dots + f\begin{pmatrix} u_n \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$.

21. Avec une soustraction $f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u-u'+u' \\ \dots \\ z-z'+z' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u-u' \\ \dots \\ z-z' \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} u' \\ \dots \\ z' \end{pmatrix}$ et une algèbre donne $f\begin{pmatrix} u-u' \\ \dots \\ z-z' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u' \\ \dots \\ z' \end{pmatrix}$.

22. On en déduit que $f\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u-u \\ \dots \\ z-z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = 0$, soit $f\begin{pmatrix} 0\,u \\ \dots \\ 0\,z \end{pmatrix} = 0\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$.

23. $f\begin{pmatrix} 1\,u \\ \dots \\ 1\,z \end{pmatrix} = 1\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ est trivial.

24. Soit n entier naturel. Alors $f\begin{pmatrix} n\,u \\ \dots \\ n\,z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \dots + u \\ \dots \\ z \dots + z \end{pmatrix}$ où u et v sont écrits n fois $= f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} \dots + f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ où $f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ est écrit aussi n fois $= n\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$.

25. Ensuite parce que tout entier relatif p est une différence $m - n$ entre entiers naturels, on a $f\begin{pmatrix} p\,u \\ \dots \\ p\,z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} (m-n)\,u \\ \dots \\ (m-n)\,z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} m\,u-n\,u \\ \dots \\ m\,z-n\,z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} m\,u \\ \dots \\ m\,z \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} n\,u \\ \dots \\ n\,z \end{pmatrix} = m\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} - n\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = (m-n)\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ $= p\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$. **Voilà pour *p* entier relatif**.

26. On a $1 = n\dfrac{1}{n}$ où n est un entier relatif,

27. donc $f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} n\dfrac{1}{n}u \\ \dots \\ n\dfrac{1}{n}z \end{pmatrix} = n\, f\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n}u \\ \dots \\ \dfrac{1}{n}z \end{pmatrix}$ et une algèbre donne $f\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n}u \\ \dots \\ \dfrac{1}{n}z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n} f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$.

28. Tout rationnel q est un quotient $\dfrac{m}{n} = m\dfrac{1}{n}$ donc $f\begin{pmatrix} q\,u \\ \dots \\ q\,z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} m\dfrac{1}{n}u \\ \dots \\ m\dfrac{1}{n}z \end{pmatrix} = m\, f\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n}u \\ \dots \\ \dfrac{1}{n}z \end{pmatrix} = m\dfrac{1}{n} f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = q\, f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$,

et **voilà pour un nombre rationnel *q***.

29. On dit que f est continue si l'image $f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ tend vers l'image $f\begin{pmatrix} \text{limite de } u \\ \dots \\ \text{limite de } z \end{pmatrix}$ quand la suite $\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ tend vers une limite $\begin{pmatrix} \text{limite de } u \\ \dots \\ \text{limite de } z \end{pmatrix}$.
On sait que dans le voisinage de chaque réel x existe des rationnel aussi proche de x qu'on veut et alors quand on pense à un rationnel q tendant vers le réel x l'image $f\begin{pmatrix} q\,u \\ \dots \\ q\,z \end{pmatrix} = q\,f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}$ tend vers $\boxed{f\begin{pmatrix} x\,u \\ \dots \\ x\,z \end{pmatrix} = x\,f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix}}$.

30. $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u+0 \\ 0+v \end{pmatrix}$ est trivial, donc par additivité $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ qu'on peut écrire $f\begin{pmatrix} u \cdot 1 \\ u \cdot 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} v \cdot 0 \\ v \cdot 1 \end{pmatrix}$ et l'alinéa 29 donne $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u\,f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \dots + v\,f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si on renomme c et d les images respectives $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors on obtient la formule $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c\,u + d\,v$.

31. Généralisation : on pourrait refaire la démonstration de l'alinéas 30 pour une fonction additive continue f de plus de deux variables et démontrer qu'il existe une suite unique d'autant de nombres que de variables telle que quels que soient les valeurs de u … et z on ait $\boxed{f\begin{pmatrix} u \\ \dots \\ z \end{pmatrix} = c\,u \dots + h\,z}$.

32. Plus concrètement, soient deux mélanges chimiques A et B de même composition qualitative, par exemple d'eau, de sel et de sucre. On sait que le volume de A et B réunis est la somme des volumes de A et de celui de B. On sait aussi que le nombre de moles d'eau, de sucre ou de sel du mélange est la somme de ces quantités dans A et B. On peut conclure qu'il existe trois coefficients constants c_{eau}, c_{sucre} et c_{sel} tels que le volume V est donné en fonction du nombre de moles n_{eau}, n_{sucre} et n_{sel} des trois espèces par $V\begin{pmatrix} n_{\text{eau}} \\ n_{\text{sucre}} \\ n_{\text{sel}} \end{pmatrix} = c_{\text{eau}}\,n_{\text{eau}} + c_{\text{sucre}}\,n_{\text{sucre}} + c_{\text{sel}}\,n_{\text{sel}}$.

Publié le
Denis Chadebec
Éditeur : BoD – Books on demand, Nordrestedt, Allemagne
https://www.bod.fr/auteurs/publier-mon-livre/calculette-de-prix.html