Les grandeurs lumineuses

La recherche sur la Toile des grandeurs et unités de celles-ci sur la Toile montre une variété de défunitions dont certaines sont difficiles à interpréter (par exemple, celle de la candela par le Bureau international des poids et mesures) a rendu passionnante la discussion.

En physique

Le flux lumineux

est la puissance totale émise par une source

Énergie	Temps
(joules)	(secondes)
W	t
$P = \Phi$	1
Proportion	

Puissance = flux

$$\Phi \text{ (watts)} = P \text{ (watts)} = \frac{W \text{ (joules)}}{t \text{ (secondes)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}W \text{ (joules)}}{\mathrm{d}t \text{ (secondes)}}$$

L'excitance

est la puissance par unité de surface

Puissance	Aire
(joules)	(m^2)
$P = \Phi$	σ
E	1
Proportion	

Excitance

$$E \text{ watts} / m^2 = \frac{\Phi \textbf{ watts}}{\sigma \textbf{ m}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Phi \textbf{ watts}}{d\sigma \textbf{ m}^2}$$

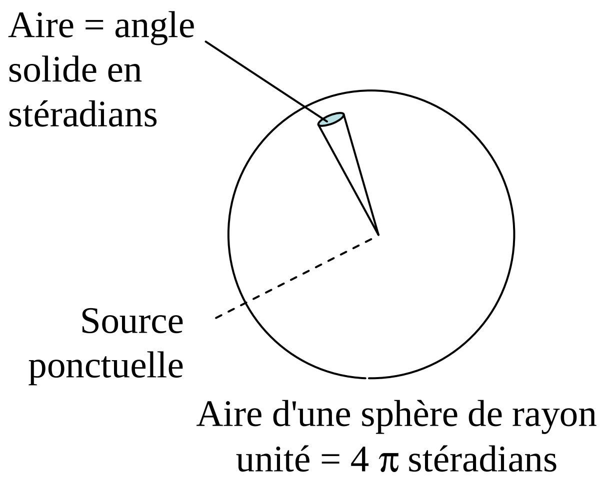
L'intensité lumineuse

est le flux lumineux par stéradian

Synonyme d'efficacité lumineuse quand on tient compte de la physiologie ?

Intensité

Puissance	Angle solide
(watts)	(stéradians)
$P = \Phi$	Ω
I	1
Proportion	



$$I \text{ (watt / stéradians)} = \frac{P \text{ ou } \Phi \text{ (watts)}}{\Omega \text{ (stéradians)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}P \text{ ou } \mathrm{d}\Phi \text{ (watts)}}{\mathrm{d}\Omega \text{ (stéradians)}}$$

Angle solide	Aire
$4\,\pi$	$4\,\pi\, R^2$
Ω	S
$\mathrm{d}\Omega$	$\mathrm{d}S$
Proportion	

La luminance

est l'intensité par unité d'aire

Intensité	Aire
(watts / stéradian)	(m^2)
I	σ
L	1
Proportion	

Luminance ← L

$$L \text{ (watt / stéradians / m}^2\text{)} = \frac{I \text{ (watts / stéradian)}}{\sigma \text{ (m}^2\text{)}} \text{ ou } \frac{dI \text{ (watts / stéradian)}}{d\sigma \text{ (m}^2\text{)}}$$

Première synthèse

Énergie	Temps
(joules)	(secondes)
W	t
$P = \Phi$	1
Proportion	

Puissance = flux
en W = J s^{-1}

Aire	Puissance
(m^2)	(watts)
σ	$P = \Phi$
1	E
Proportion	

Puissance	Angle solide
(watts)	(stéradians)
$P = \Phi$	Ω
I	1
Proportion	

Intensité
en W sr^{-1}

Excitance
en W m^{-2}

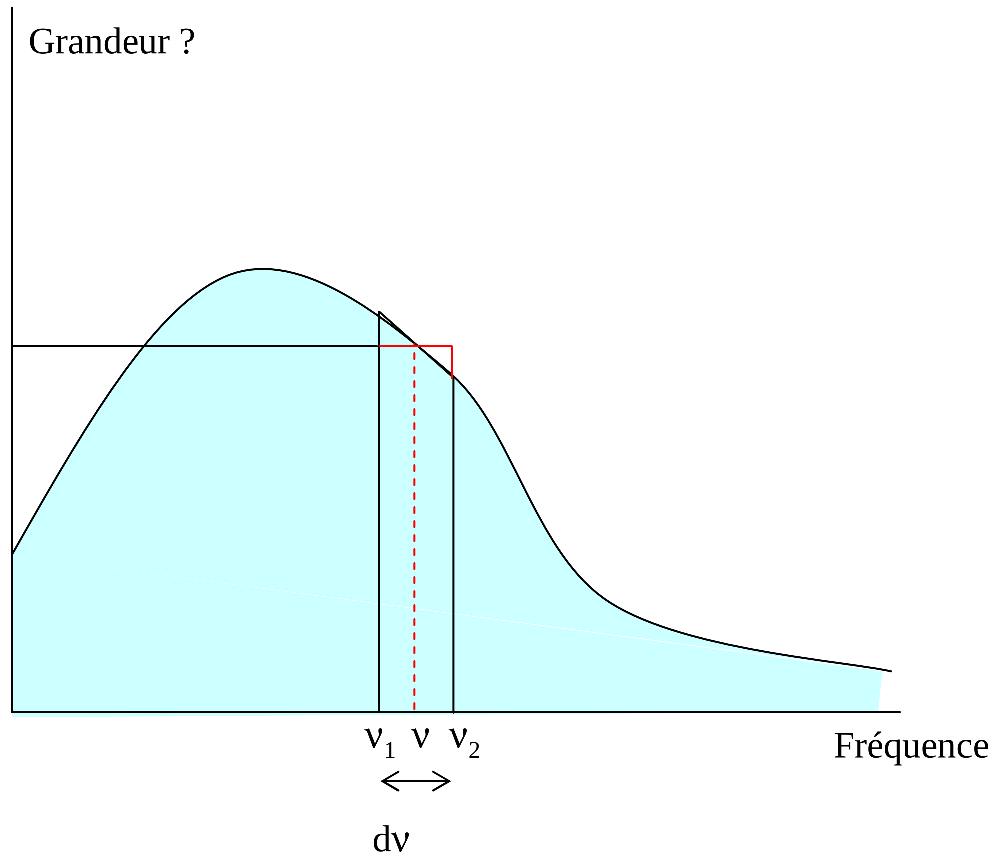
Angle solide	Excitance
(stéradians)	(watts / m^2)
Ω	E
1	L
Proportion	

Intensité	Aire
(watts / stéradian)	(m^2)
I	σ
L	1
Proportion	

Luminance
en W m^{-2} sr^{-1}

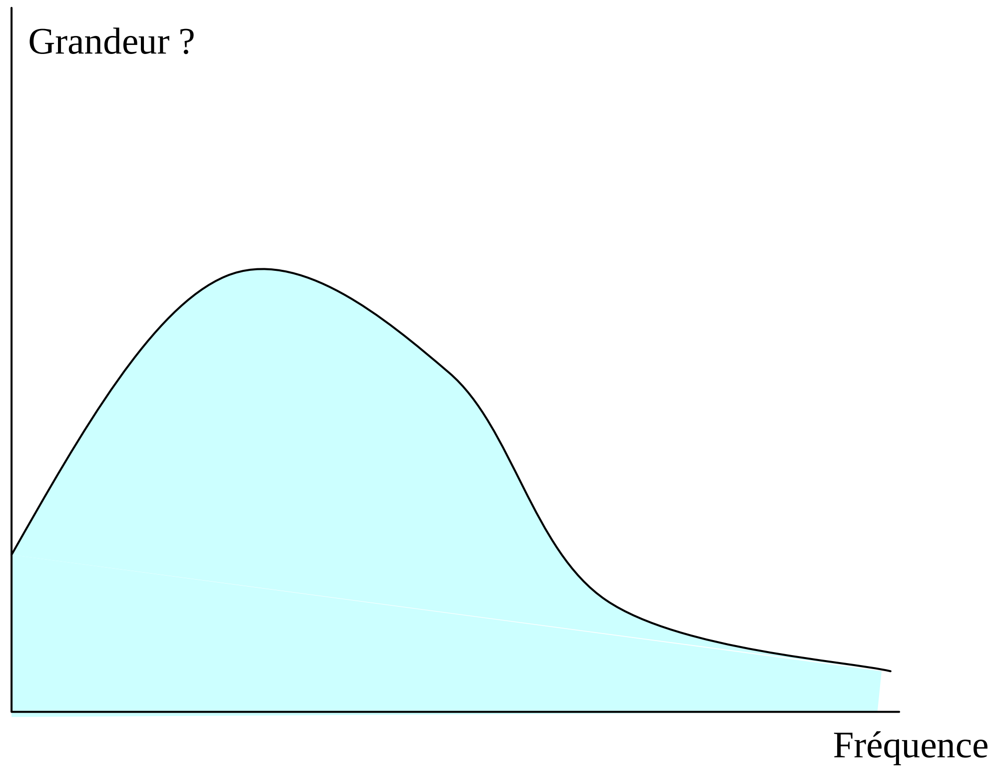
Valeurs spectrales :
initiation au calcul différentiel

Valeurs spectrales



Luminance spectrale

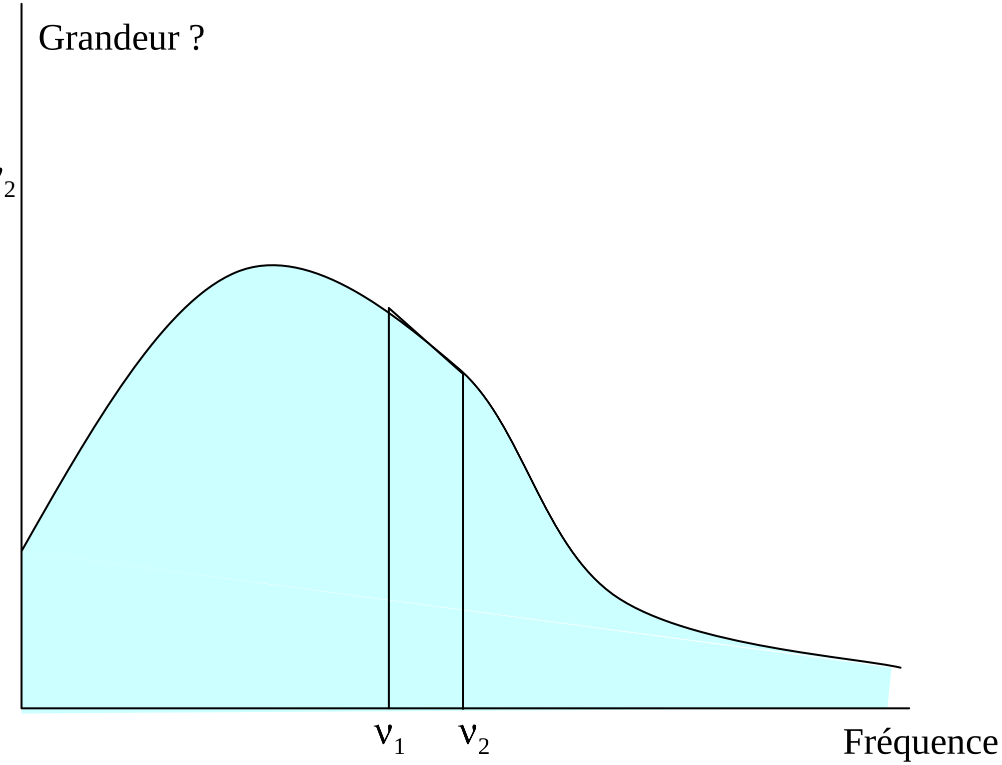
Surface verte : aire = luminance = *L* ou puissance *P*



Luminance spectrale

Surface verte : aire = luminance = *L* ou puissance *P*

Lame verte : aire = luminance ou puissance entre ν_1 et ν_2

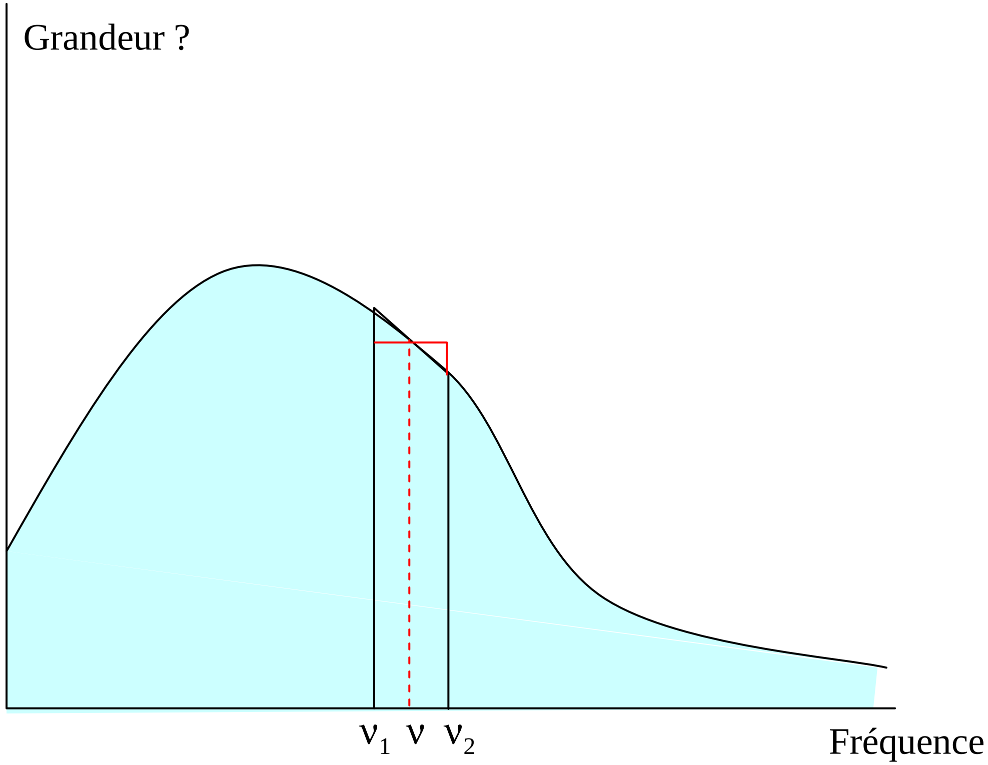


Luminance spectrale

Surface verte : aire = luminance = *L* ou puissance *P*

Lame verte : aire = luminance ou puissance entre ν_1 et ν_2

Rectangle : la même si ν est bien choisie



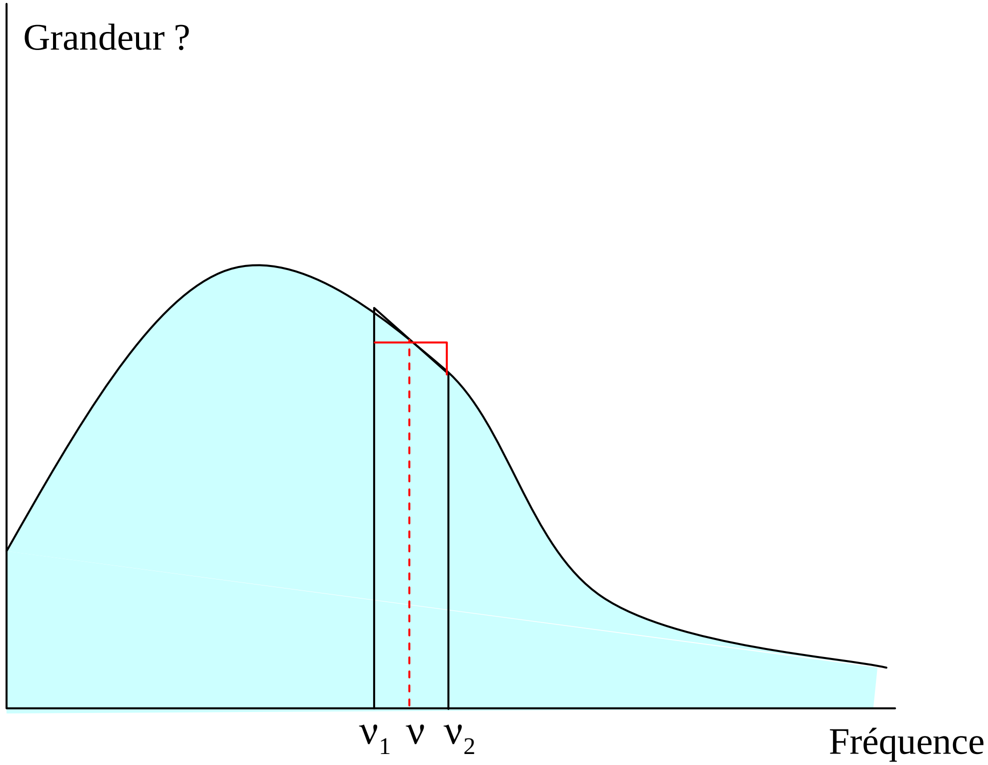
Luminance spectrale

Surface verte : aire = luminance = *L* ou puissance *P*

Lame verte : aire = luminance ou puissance entre ν_1 et ν_2

Rectangle : la même si ν est bien choisie

Luminance entre ν_1 et ν_2 = grandeur x $(\nu_2 - \nu_1)$



Luminance spectrale

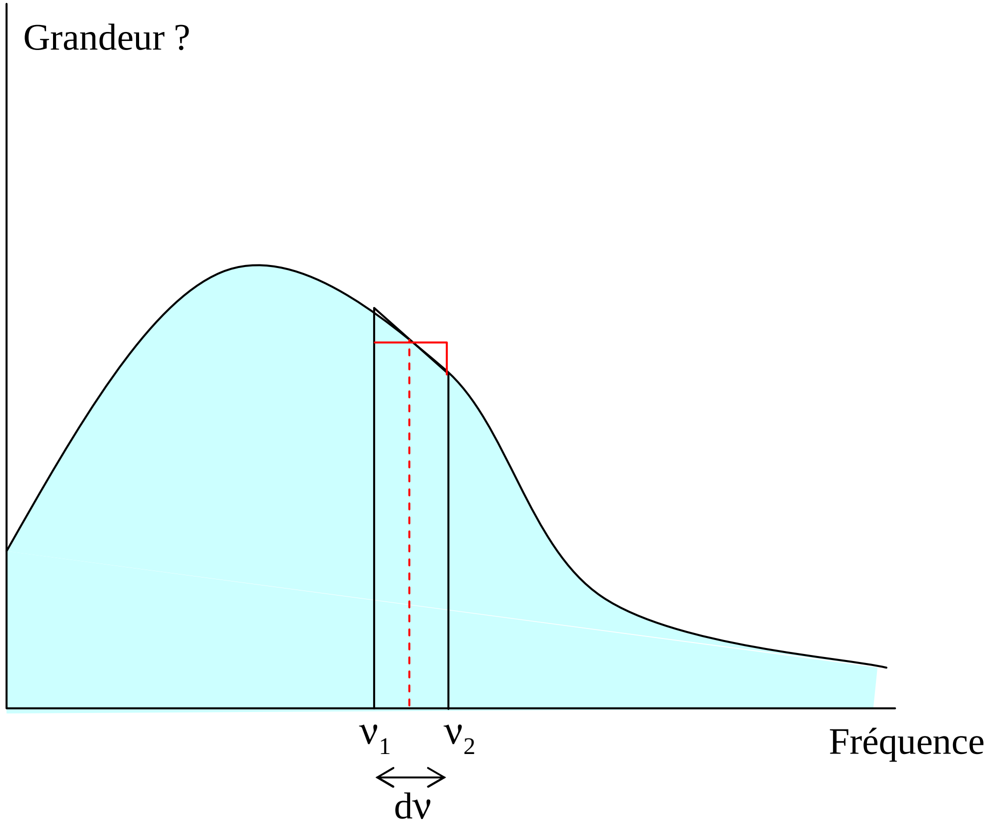
Surface verte : aire = luminance = *L* ou puissance *P*

Lame verte : aire = luminance ou puissance entre ν_1 et ν_2

Rectangle : la même si ν est bien choisie

Luminance entre ν_1 et ν_2 = grandeur x $(\nu_2 - \nu_1)$

dL = grandeur x $d\nu$



Luminance spectrale

Grandeur = $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\nu} = \text{luminance spectrale } L_\nu}$

ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\nu} = \text{puissance spectrale } P_\nu}$

Surface verte : aire = luminance = L ou puissance P

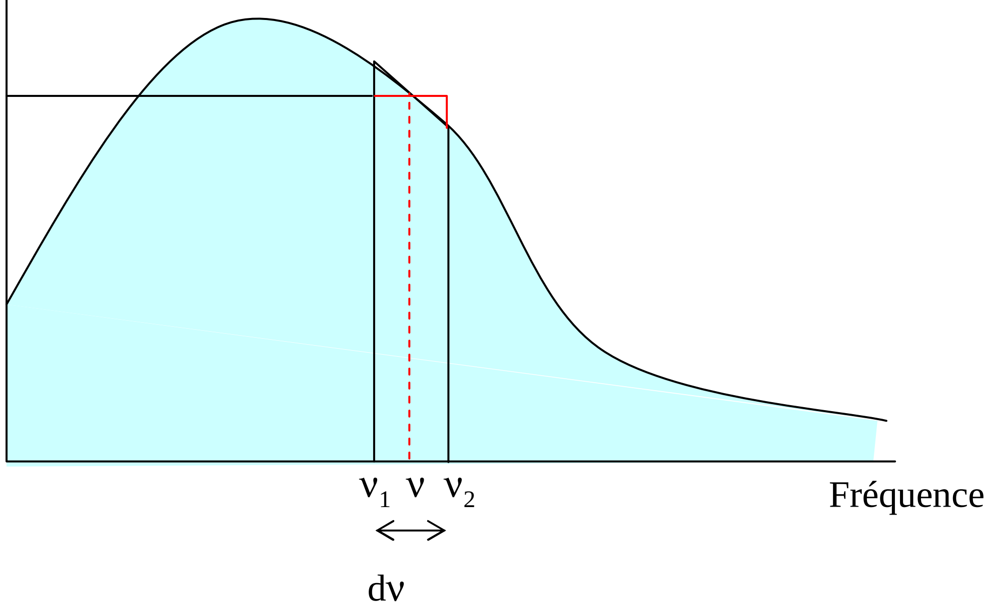
Lame verte : aire = luminance ou puissance entre ν_1 et ν_2

Rectangle : la même si ν est bien choisie

Luminance entre ν_1 et ν_2 = grandeur x $(\nu_2 - \nu_1)$

$\mathrm{d}L$ = grandeur x $\mathrm{d}\nu$

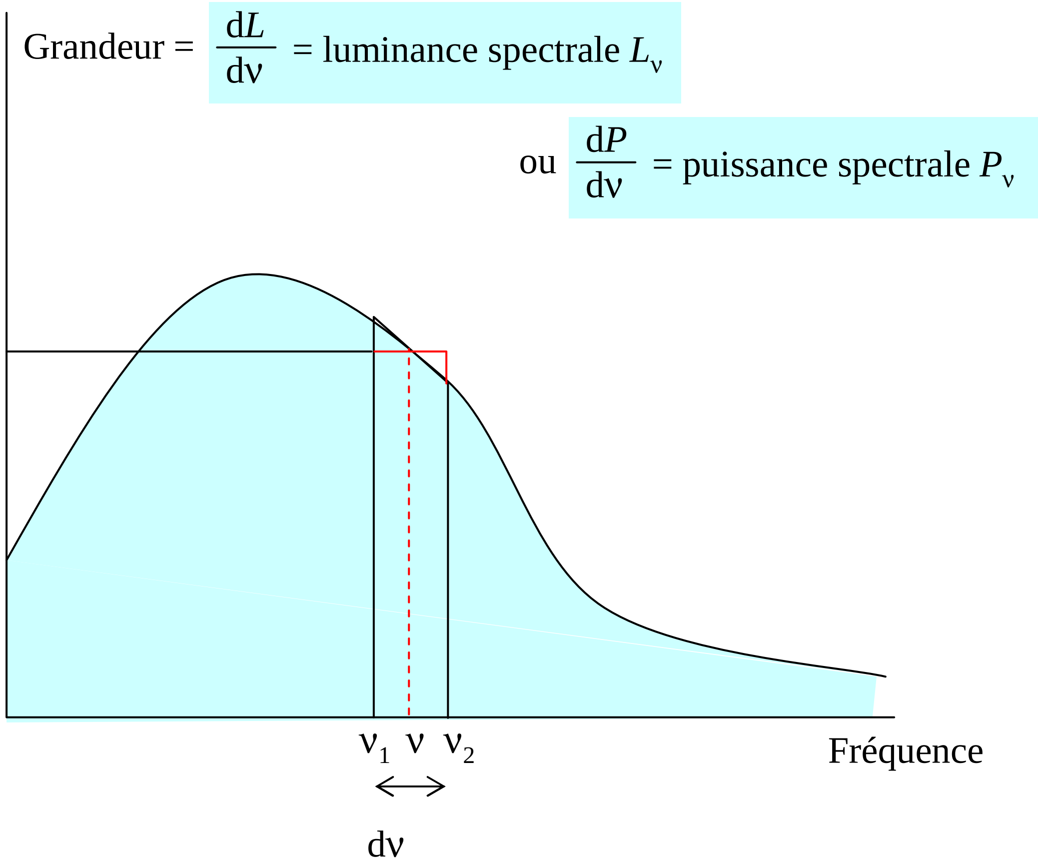
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\nu} = \text{grandeur}$$



Fréquence	Luminance
(Hz)	$(\mathrm{W\ m^{-2}\ sr^{-1}})$
$\mathrm{d}\nu$	$\mathrm{d}L$
1	L_ν
Proportion	

Initiation au calcul intégral

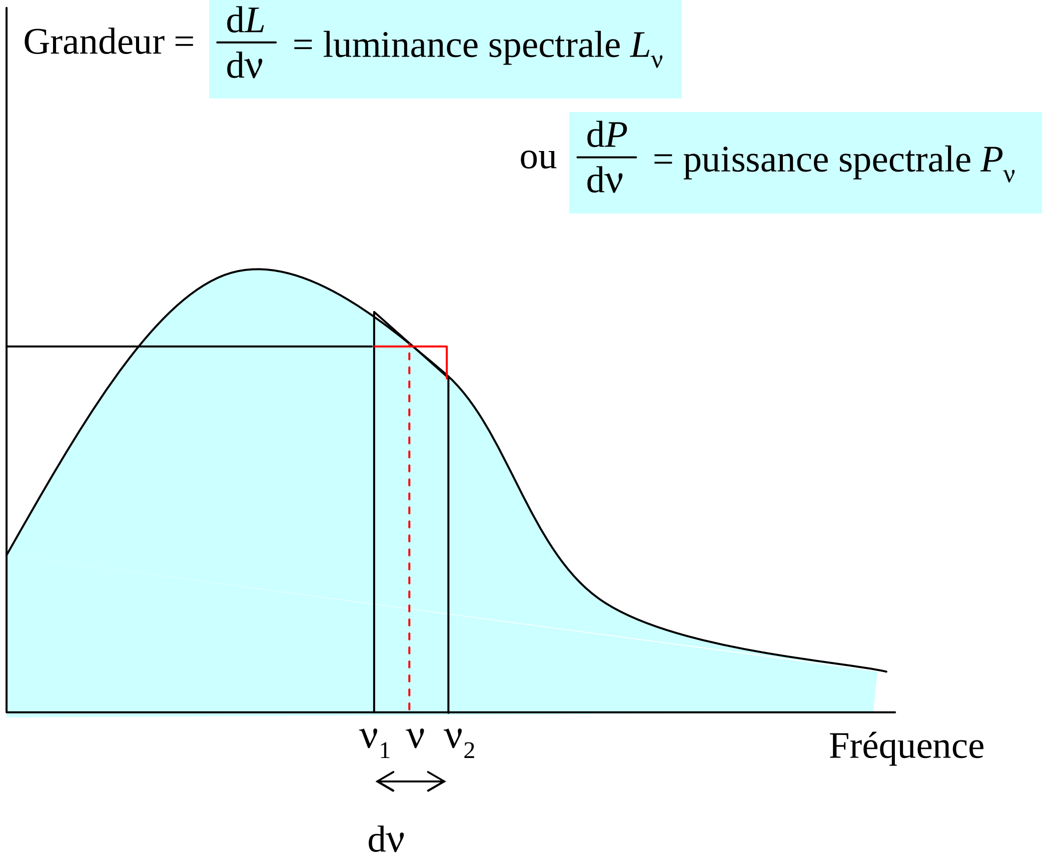
L'aire de la surface verte est exactement la somme des aires des lames vertes



Initiation au calcul intégral

L'aire de la surface verte est exactement la somme des aires des lames vertes

Luminance ou puissance	=	somme des	Luminance ou puissance spectrales	x	largeurs des lames



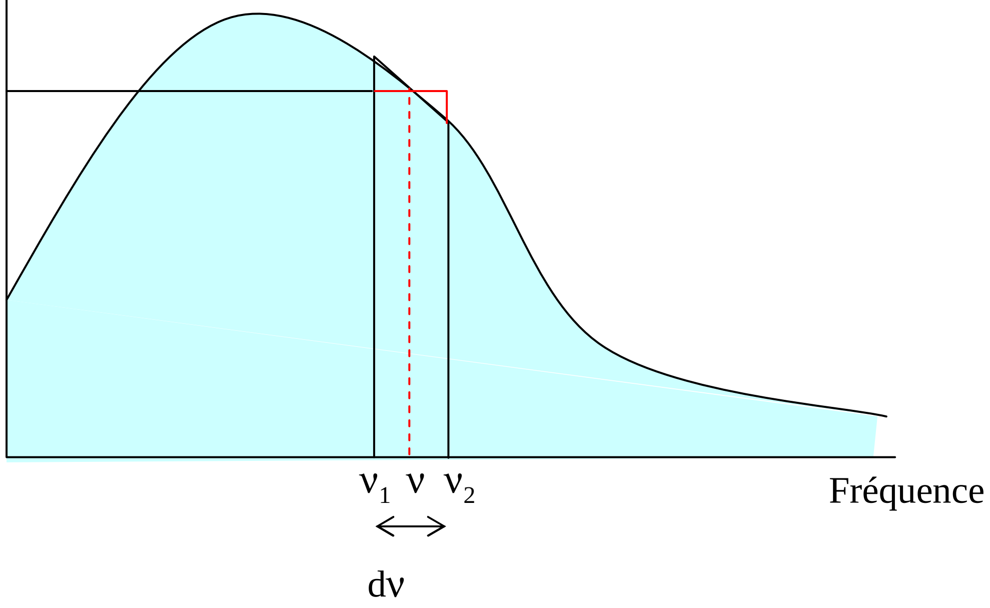
Initiation au calcul intégral

L'aire de la surface verte est exactement la somme des aires des lames vertes

Luminance ou puissance	=	somme des	Luminance ou puissance spectrales	x	largeurs des lames
L ou P	=	$\int$	L_ν ou P_ν		$d\nu$

Grandeur = $\dfrac{dL}{d\nu}$ = luminance spectrale L_ν

ou $\dfrac{dP}{d\nu}$ = puissance spectrale P_ν



Initiation au calcul intégral

L'aire de la surface verte est exactement la somme des aires des lames vertes

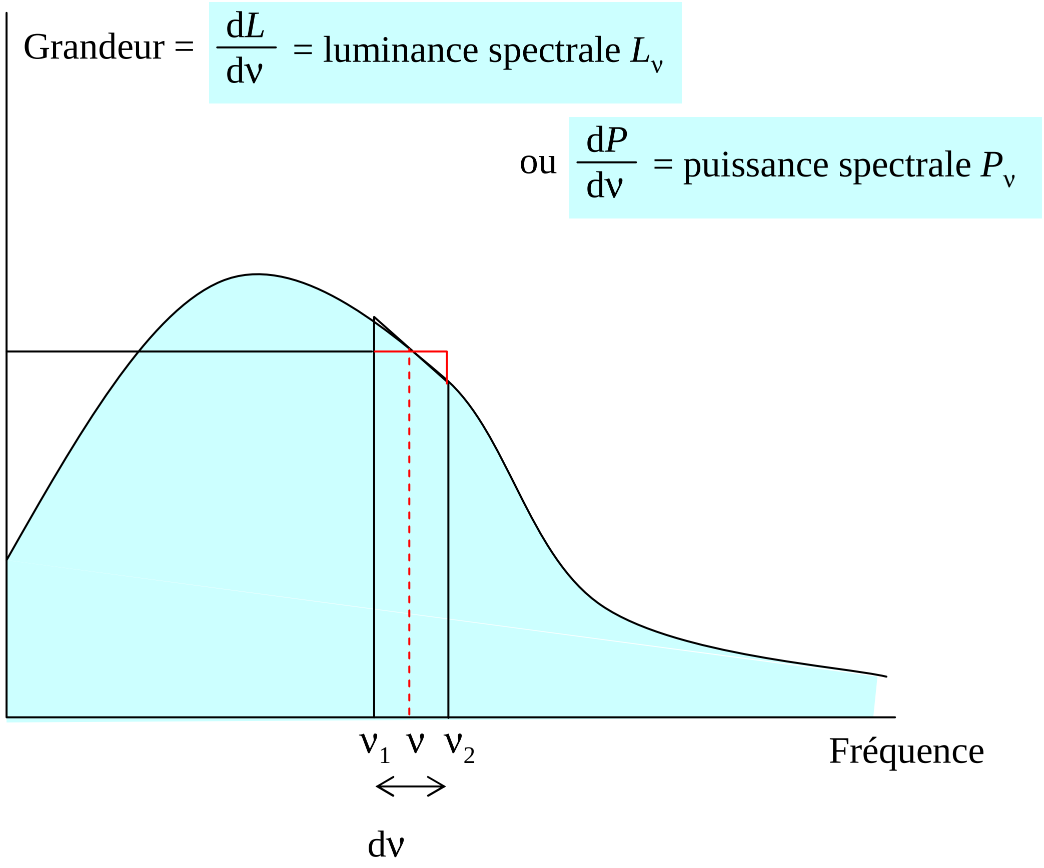
Luminance ou puissance	=	somme des	Luminance ou puissance spectrales	x	largeurs des lames
L ou P	=	$\int$	L_ν ou P_ν		$\mathrm{d}\nu$

Code de l'écriture de Leibniz

$$L = \int L_\nu \, \mathrm{d}\nu$$

ou

$$P = \int P_\nu \, \mathrm{d}\nu$$



Synthèse

Énergie	Temps
(joules)	(secondes)
dW	dt
$P = \Phi$	1
Proportion	

Puissance = flux
en W = J s^{-1}

Aire	Puissance
(m^2)	(watts)
dσ	dP = dΦ
1	E
Proportion	

Puissance	Angle solide
(watts)	(stéradians)
dP = dΦ	$d\Omega$
I	1
Proportion	

Intensité
en W sr^{-1}

Angle solide	Excitance
(stéradians)	(watts / m^2)
dΩ	dE
1	L
Proportion	

Intensité	Aire
(watts / stéradian)	(m^2)
dI	dσ
L	1
Proportion	

Luminance
en W m^{-2} sr^{-1}

Fréquence	Luminance
(Hz)	(W m^{-2} sr^{-1})
dλ	dL
1	L_λ
Proportion	

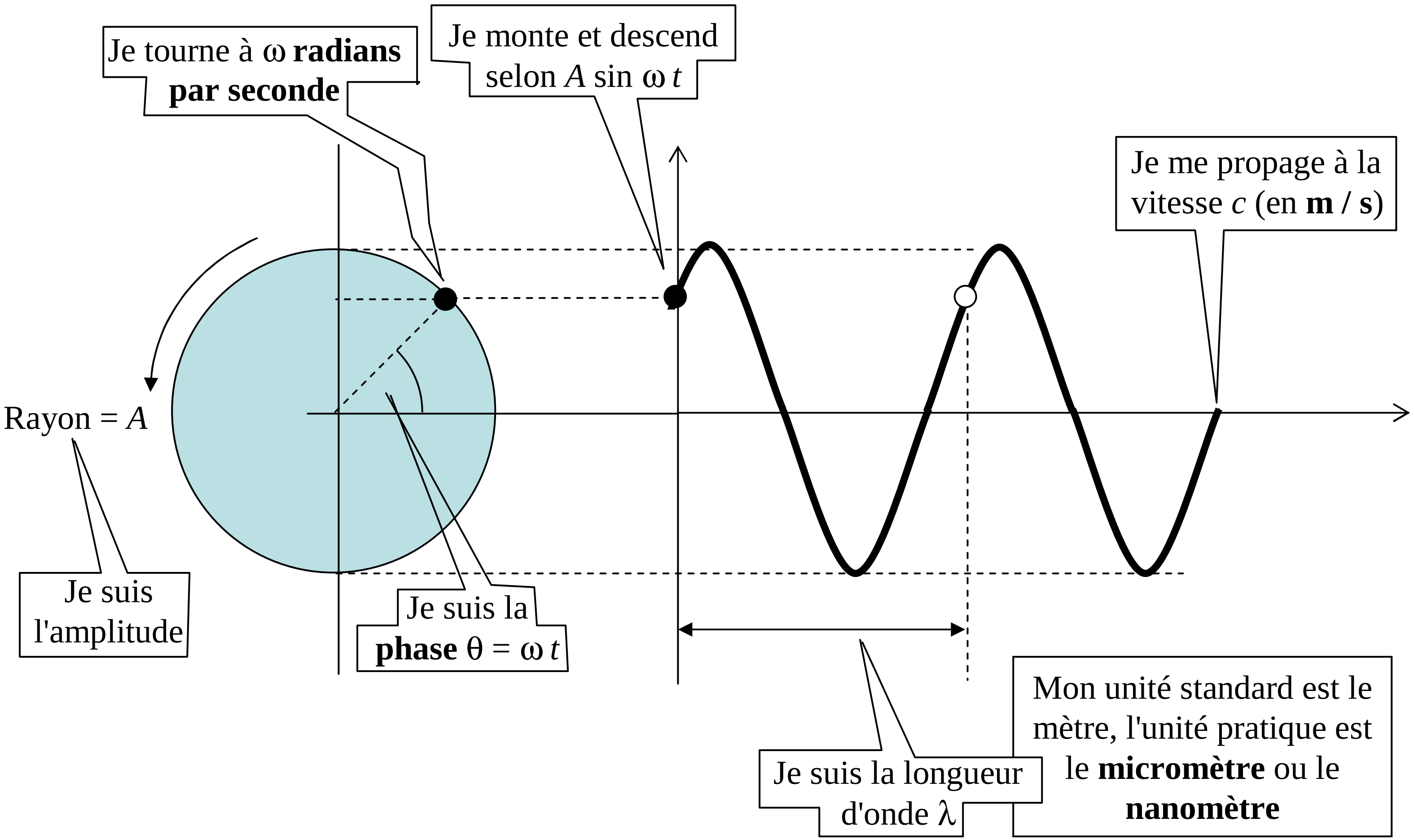
Luminances
spectrales

Luminance	Fréquence
(W m^{-2} sr^{-1})	(Hz)
dL	dν
L_ν	1
Proportion	

en W m^{-3} sr^{-1} ⟷ en W m^{-2} sr^{-1} Hz^{-1}

Radiation monochromatique

Modèle mathématique



Les grandeurs des ondes

Ne retenez que le nom des grandeurs et les signes habituels pour les désigner.

Prévoireune ligne par grandeur plus une ligne pour une situation quelconque.

Donner un titre à chaque colonne dans l'ordre que vous voulez.

Écrire 1 dans les cases d'une diagonale.

Temps	Oscillations	Distance	Angles	Notes
1	ν	c	ω	1 ujité de temps (s)
T	1	λ	$2\,\pi$	1 oscillation
		1		1 unité de longueur (m)
	σ	k	1	1 radian
t	n	x	φ	Situation quelconque
Proportion				

ν = fréquence en hertz (Hz)
c = vitesse de propagation (m/s)
ω = pulsation (rd/s)
T = période (s)
λ = longueur d'onde (m ou μm ou nm)
σ = nombre d'onde circulaire (1/m)
k = nombre d'onde angulaire (rd/m)
t = temps
n = nombre d'oscillations
x = distance de propagation
φ = phase

Extrayez un tableau de quatre cases.

Amusez-vous avec les lois des proportions (quotients égaux, produits croisés égaux, quatrième proportionnelle).

Exemple :

T	λ
t	x

donne $\dfrac{t}{T} = \dfrac{x}{\lambda}$, $\lambda\, t = x\, T$, $\lambda = \dfrac{T\,x}{t}$, etc.

La lumière en ophtalmologie

C'est ici que l'atelier est devenu un débat ouvert par la définition officielle de la candela lue sur la Toile !

La candela

https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/candela/12656

Commençons par le plus simple(et le plus clair) :

Candela (Réf. ortho. candéla)

Nom féminin

(Latin candela, chandelle)

Unité de mesure d'intensité lumineuse (symbole cd) équivalant à l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540 × 10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

Et maintgenant, passons à la définition choisie par le Bureau international des poids et mesures

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée.

système international (des unités)

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz

versus **intensité énergétique** dans le Larousse

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683

C'est quoi ?

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}

C'est quoi ?

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}, unité égale à cd sr W^{-1}, ou cd sr kg^{-1} m^{-2} s^{3}

On a l'impression que ce texte "tourne en rond"

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}, unité égale à cd sr W^{-1}, ou cd sr kg^{-1} m^{-2} s^3, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$. » OUF !

Révisons nos cours de physique ou consultons un physicien …

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}, unité égale à cd sr W^{-1}, ou cd sr kg^{-1} m^{-2} s^{3}, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$. »

OUF !

Dans cet énoncé, h est la constante de Planck

Révisons nos cours de physique ou consultons un physicien …

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 × 10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}, unité égale à cd sr W^{-1}, ou cd sr kg^{-1} m^{-2} s^3, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h, c et $\Delta\nu_{Cs}$. »

OUF !

Dans cet énoncé, h est la constante de Planck, c la célérité de la lumière dans le vide de matière

Révisons nos cours de physique ou consultons un physicien …

C'est moi qui l'ai ajouté …

La candela

https://fr.wikipedia.org/wiki/Candela

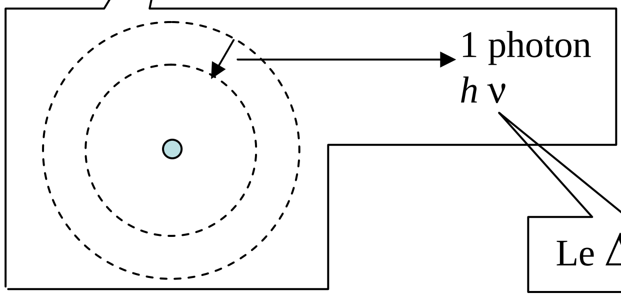
À compter du 20 mai 2019, le Bureau international des poids et mesures définit ainsi la candela :

« La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{Cd} égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $lm\ W^{-1}$, unité égale à $cd\ sr\ W^{-1}$, ou $cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *h*, *c* et $\Delta\nu_{Cs}$. »

OUF !

Dans cet énoncé, *h* est la constante de Planck, *c* la célérité de la lumière dans le vide de matière, $\Delta\nu_{Cs}$ est la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé.

Chaque atome est seul dans le vide de matière sans champ de force



Le $\Delta\nu_{Cs}$?

Métal alcalin
Isotope stable
55 protons
133 – 55 = 78 neutrons
55 électrons

Le caroussel des unités

Qu'est-ce

?

$\mathrm{lm\ W^{-1} = cd\ sr\ W^{-1} = cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}}$

$\mathrm{lm = cd \cdot sr}$

$\mathrm{W^{-1} = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}}$

$\mathrm{W = kg\ m^{2}\ s^{-3}}$

Postulat de Newton $F = m\,A$

$\mathrm{N = kg\ m\ s^{-2}}$

Travail = $F\,L$

$\mathrm{J = N\ m} \longrightarrow \mathrm{J = kg\ m^{2}\ s^{-2}}$

$\mathrm{W = J\ s^{-1}}$

Tentative de compréhension

La définition du Larousse est-elle fausse ?

Ou seulement incomplète ?

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance

C'est quoi ? …

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique,

Qu'est-ce que c'est ?

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique, l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$\mathrm{d}I = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

Apprenons ou révisons ce qu'est le calcul différentiel …

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$\mathrm{d}I = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

Surface de la source

Aire = dS

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$dI = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

luminance

C'est quoi ? …

Surface de la source

Aire = dS

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

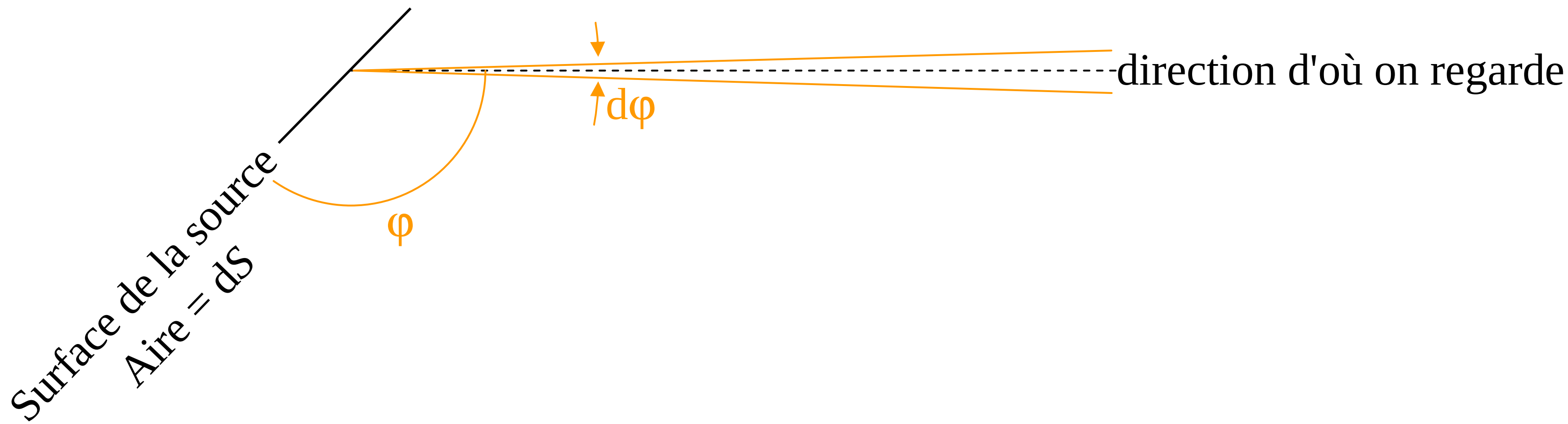
$$dI = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

luminance

angle de longitude compté par rapport à une origine arbitraire

Que fait-elle ici ?



Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

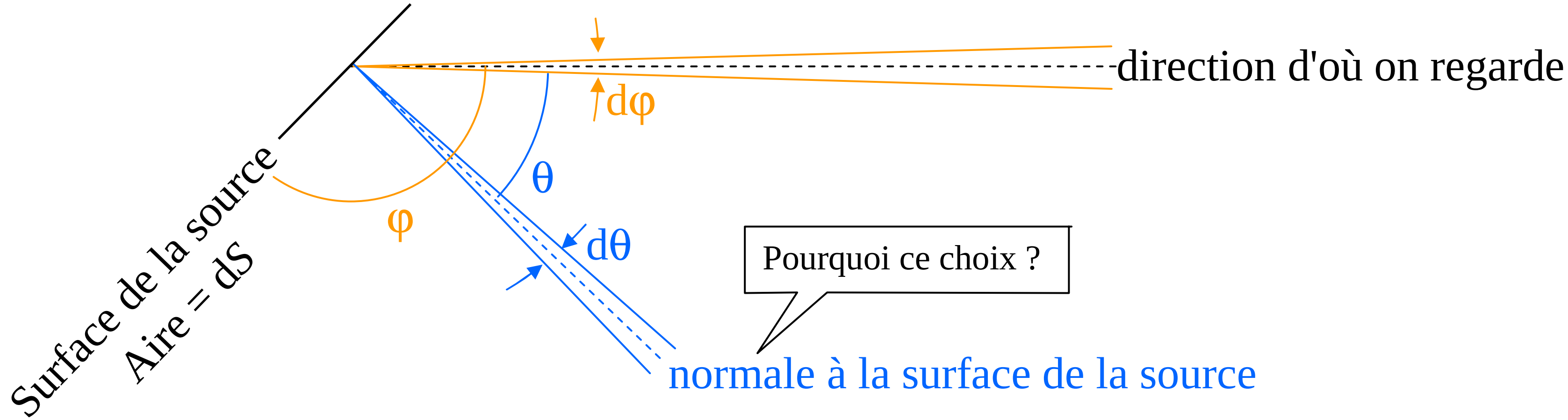
$$\mathrm{d}I = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

luminance

angle de longitude compté par rapport à une origine arbitraire

angle entre la direction portant L et la normale à la surface source



Intensité lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$dI = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS — dI

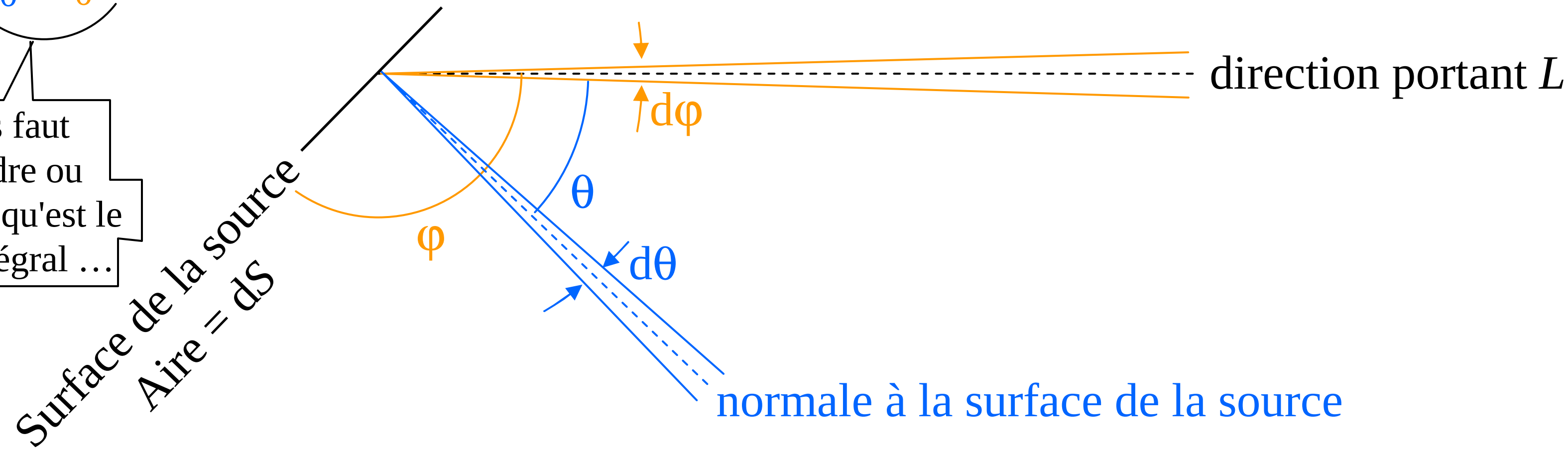
luminance — L

angle de longitude compté par rapport à une origine arbitraire — φ

angle entre la direction portant L et la normale à la surface source — θ

donc $I = \underbrace{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi}}$ $L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$.

Il nous faut apprendre ou réviser ce qu'est le calcul intégral …



Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$dI = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

luminance

angle de longitude compté par rapport à une origine arbitraire

angle entre la direction portant L et la normale à la surface source

donc $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$.

L'**intensité lumineuse moyenne** $\langle I \rangle$ dans l'intervalle fini d'angle solide $\delta\Omega$ s'exprime à partir du flux lumineux $\delta\Phi$ contenu dans cet angle par $\underbrace{\langle I \rangle = \delta\Phi / \delta\Omega}_{\text{C'est classique pour une moyenne.}}$.

Intensité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_lumineuse

Considérant la définition de la luminance et de l'étendue géométrique , l'intensité lumineuse $I(\varphi, \theta)$ s'exprime de la façon suivante

$$dI = L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

intensité élémentaire correspondant à l'élément de surface dS

luminance

angle de longitude compté par rapport à une origine arbitraire

angle entre la direction portant L et la normale à la surface source

donc $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} L(\varphi, \theta) \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$.

L'**intensité lumineuse moyenne** $\langle I \rangle$ dans l'intervalle fini d'angle solide $\delta\Omega$ s'exprime à partir du flux lumineux $\delta\Phi$ contenu dans cet angle par $\langle I \rangle = \delta\Phi / \delta\Omega$.

On trouve cette expression abusivement écrite sous la forme $\langle I \rangle = d\Phi / d\Omega$; suggérant ainsi une dépendance entre Φ et Ω. Or ces grandeurs sont indépendantes l'une de l'autre.

Il nous faut apprendre ou réviser ce qu'est le calcul intégral …

L'excitance ou émittance

https://fr.wikipedia.org/wiki/Exitance

L'**exitance** ou **émittance** est une grandeur utilisée en photométrie et en radiométrie. Elle désigne le flux (lumineux en photométrie et énergétique en radiométrie) émis par unité de surface d'une source étendue*.

L'**exitance** correspond à une émission d'énergie rayonnée. Pour désigner l'énergie rayonnée qui frappe une surface, on parle d'**éclairement** (lumineux ou énergétique). Il n'y a cependant aucune différence physique entre ces quantités, seul diffère le point de vue de l'observateur.

* Guide pratique pour le système international d'unités (SI) [archive], Magdeleine Moureau, Editions TECHNIP, 1996

L'excitance ou émittance

https://fr.wikipedia.org/wiki/Exitance

L'**exitance** ou **émittance** est une grandeur utilisée en photométrie et en radiométrie. Elle désigne le flux (lumineux en photométrie et énergétique en radiométrie) émis par unité de surface d'une source étendue*.

L'**exitance** correspond à une émission d'énergie rayonnée. Pour désigner l'énergie rayonnée qui frappe une surface, on parle d'**éclairement** (lumineux ou énergétique). Il n'y a cependant aucune différence physique entre ces quantités, seul diffère le point de vue de l'observateur.

Le terme **exitance** remplace le terme émittance.

* Guide pratique pour le système international d'unités (SI) [archive], Magdeleine Moureau, Editions TECHNIP, 1996

L'excitance ou émittance

https://fr.wikipedia.org/wiki/Exitance

L'**exitance** ou **émittance** est une grandeur utilisée en photométrie et en radiométrie. Elle désigne le flux (lumineux en photométrie et énergétique en radiométrie) émis par unité de surface d'une source étendue*.

L'**exitance** correspond à une émission d'énergie rayonnée. Pour désigner l'énergie rayonnée qui frappe une surface, on parle d'**éclairement** (lumineux ou énergétique). Il n'y a cependant aucune différence physique entre ces quantités, seul diffère le point de vue de l'observateur.

Le terme **exitance** remplace le terme émittance. L'utilisation du terme **radiance** est abandonnée car ce terme signifie luminance énergétique en anglais et s'est progressivement imposé avec cette définition dans la langue française.

* Guide pratique pour le système international d'unités (SI) [archive], Magdeleine Moureau, Editions TECHNIP, 1996

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e.

À définir

À définir

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$).

À définir

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K\text{, disons } \frac{K}{1} = \frac{\Phi_\nu}{\Phi_e} = \frac{\int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda}$$

On peut lire cette définition comme une proportion

K	Φ_ν	$\int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$
1	Φ_e	$\int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$
Proportion		

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda) \ \Phi_{e\lambda} (\lambda) \, d\lambda / \int_0^\infty \Phi_{e\lambda} (\lambda) \, d\lambda$$

$$\frac{K}{1} = \frac{\Phi_\nu}{\Phi_e} = \frac{\int_0^\infty K(\lambda) \ \Phi_{e\lambda} (\lambda) \, d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda} (\lambda) \, d\lambda}$$

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt (lm·W^{-1}). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \underbrace{\Phi_\nu}_{\text{Flux lumineux (en lm)}} / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \,/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en $lm \cdot W^{-1}$)

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt (lm·W⁻¹). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \,/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en $\mathrm{lm \cdot W^{-1}}$)

densité spectrale de flux énergétique (en $\mathrm{W\ m^{-1}}$)

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en $lm \cdot W^{-1}$)

densité spectrale de flux énergétique (en $W\ m^{-1}$)

Dans le domaine photopique, c'est-à-dire en vision diurne, la valeur de l'efficacité lumineuse est toujours un nombre compris entre 0 $lm\ W^{-1}$ et 683,002 $lm\ W^{-1}$

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l’œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en $lm \cdot W^{-1}$)

densité spectrale de flux énergétique (en $W\ m^{-1}$)

Dans le domaine photopique, c'est-à-dire en vision diurne, la valeur de l'efficacité lumineuse est toujours un nombre compris entre 0 $lm\ W^{-1}$ et 683,002 $lm\ W^{-1}$, tandis que 683,002 $lm\ W^{-1}$ est l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 THz

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt ($lm \cdot W^{-1}$). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en $lm \cdot W^{-1}$)

densité spectrale de flux énergétique (en $W\ m^{-1}$)

Dans le domaine photopique, c'est-à-dire en vision diurne, la valeur de l'efficacité lumineuse est toujours un nombre compris entre 0 $lm\ W^{-1}$ et 683,002 $lm\ W^{-1}$, tandis que 683,002 lm W−1 est l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 THz, correspondant à la longueur d'onde de 555,016 nm (vert–jaune).

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt (lm·W^{-1}). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en lm·W^{-1})

densité spectrale de flux énergétique (en W m^{-1})

Dans le domaine photopique, c'est-à-dire en vision diurne, la valeur de l'efficacité lumineuse est toujours un nombre compris entre 0 lm W^{-1} et 683,002 lm W^{-1}, tandis que 683,002 lm W^{-1} est l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 THz, correspondant à la longueur d'onde de 555,016 nm (vert–jaune), c'est-à-dire au maximum de sensibilité de l'œil humain

Efficacité lumineuse

https://fr.wikipedia.org/wiki/Efficacit%C3%A9_lumineuse_d%27un_rayonnement

L'**efficacité lumineuse d'un rayonnement** est le rapport du flux lumineux Φ_v sur le flux énergétique Φ_e. Son unité est le lumen par watt (lm·W^{-1}). Elle exprime l'efficacité d'un rayonnement compte tenu de la sensibilité de l'œil humain modélisée à l'aide de l'efficacité lumineuse spectrale.

$$K = \Phi_\nu / \Phi_e = \int_0^\infty K(\lambda)\ \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda \,/ \int_0^\infty \Phi_{e\lambda}(\lambda)\, d\lambda$$

Flux lumineux (en lm)

Flux énergétique (en W)

efficacité lumineuse spectrale (en lm·W^{-1})

densité spectrale de flux énergétique (en W m^{-1})

Dans le domaine photopique, c'est-à-dire en vision diurne, la valeur de l'efficacité lumineuse est toujours un nombre compris entre 0 lm W^{-1} et 683,002 lm W^{-1}, tandis que 683,002 lm W−1 est l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 THz, correspondant à la longueur d'onde de 555,016 nm (vert–jaune), c'est-à-dire au maximum de sensibilité de l'œil humain, selon la fonction d'efficacité lumineuse spectrale d'un observateur de référence défini par la CIE.

Le lumen

https://fr.wikipedia.org/wiki/Lumen_(unit%C3%A9)

Par définition, 1 lumen correspond au flux lumineux émis dans un angle solide de 1 stéradian par une source lumineuse isotrope (ponctuelle uniforme) située au sommet de l'angle solide et dont l'intensité lumineuse vaut 1 candela.

Les sources d'information se mordent la queue ! (image 23)

Élie Lévy, *Dictionnaire de physique*, Presses universitaires de France, Paris, 1988, page 486.

Le lux

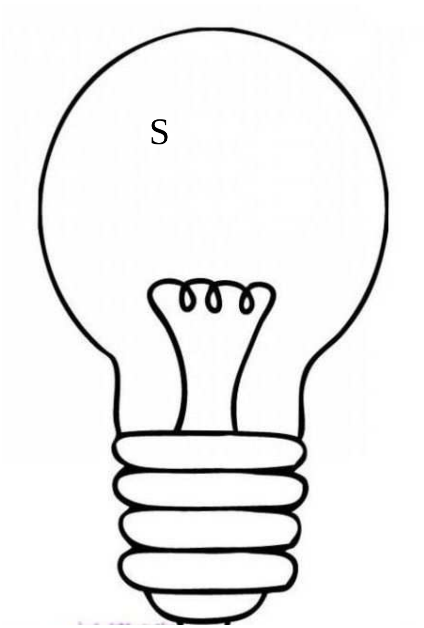
https://fr.wikipedia.org/wiki/Lux_(unit%C3%A9)?tableofcontents=0

Le **lux** est une unité de mesure de l'éclairement lumineux (symbole : lx). Il caractérise l'intensité lumineuse reçue par unité de surface1.
Un lux est l'éclairement d'une surface qui reçoit, d'une manière uniformément répartie, un flux lumineux d'un lumen par mètre carré.

On s'y perd …

Étendue géométrique

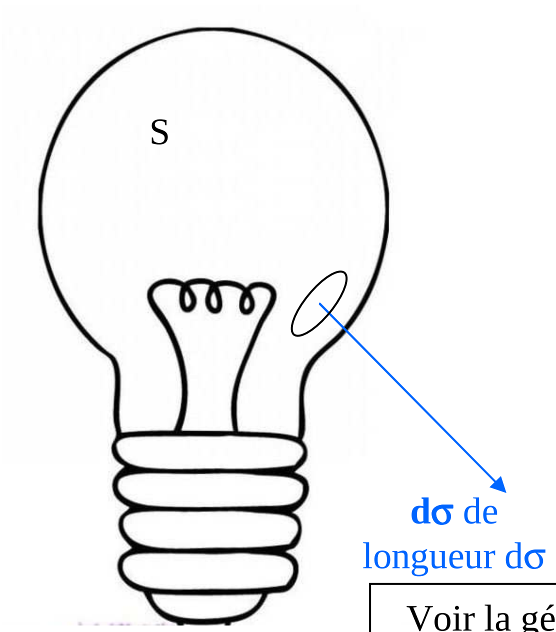
https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



Source

Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique

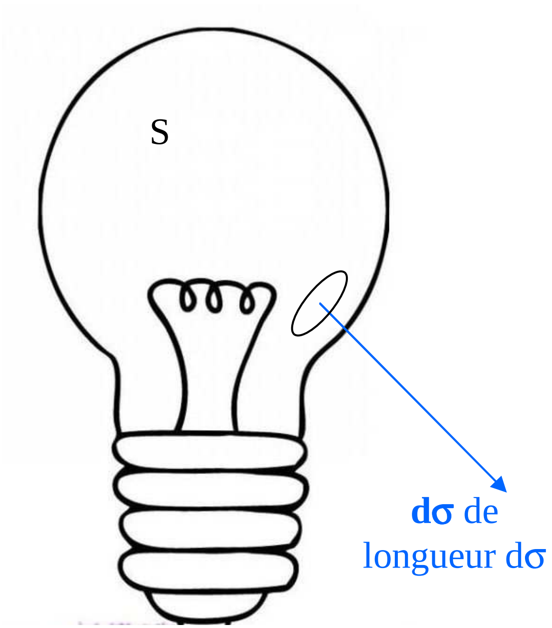


Source

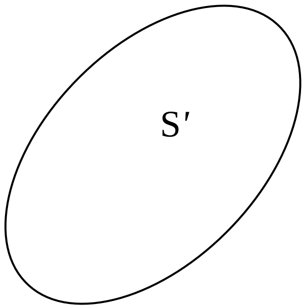
Voir la géométrie des su(faces

Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



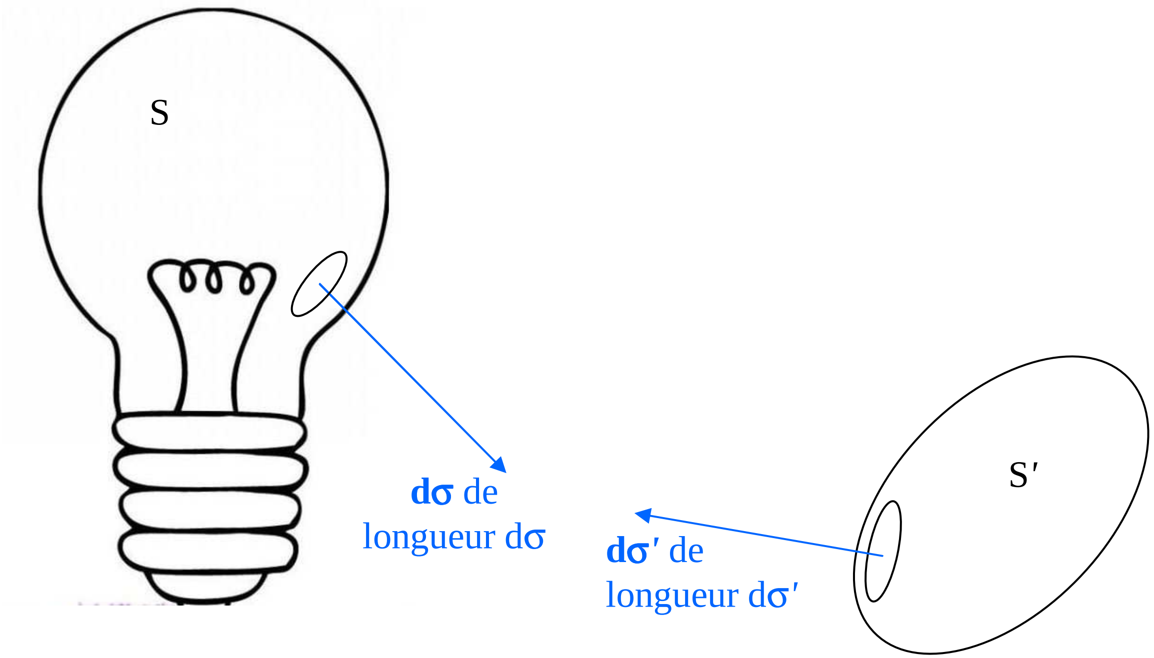
Source



Objet éclairé

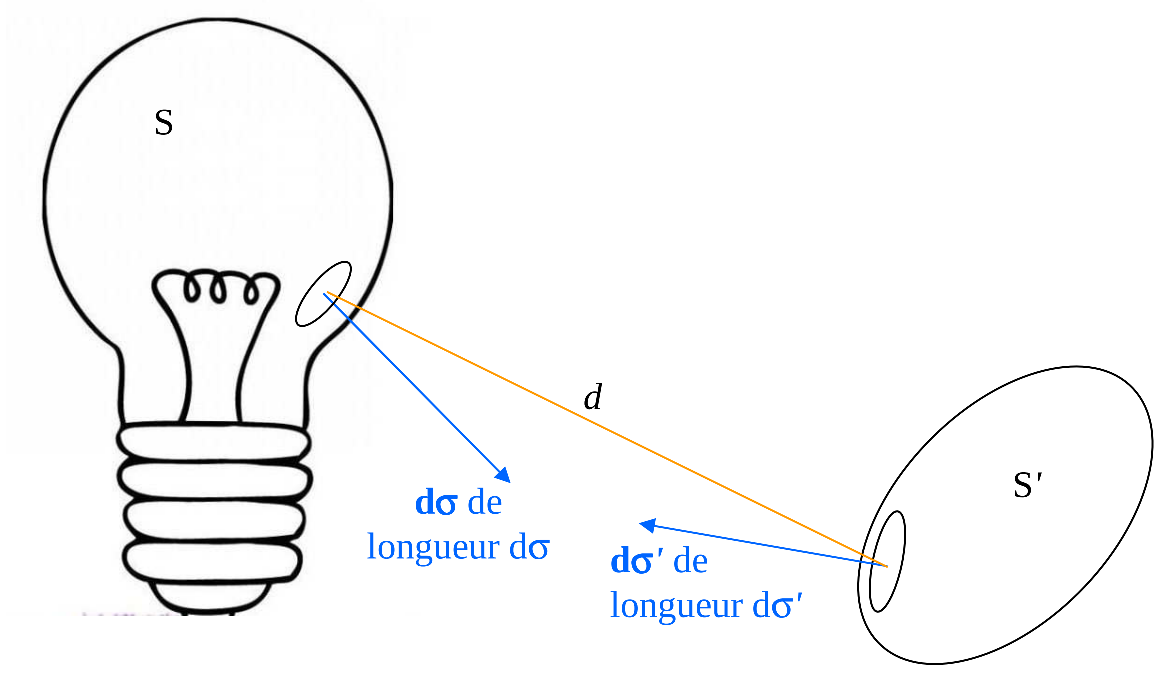
Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



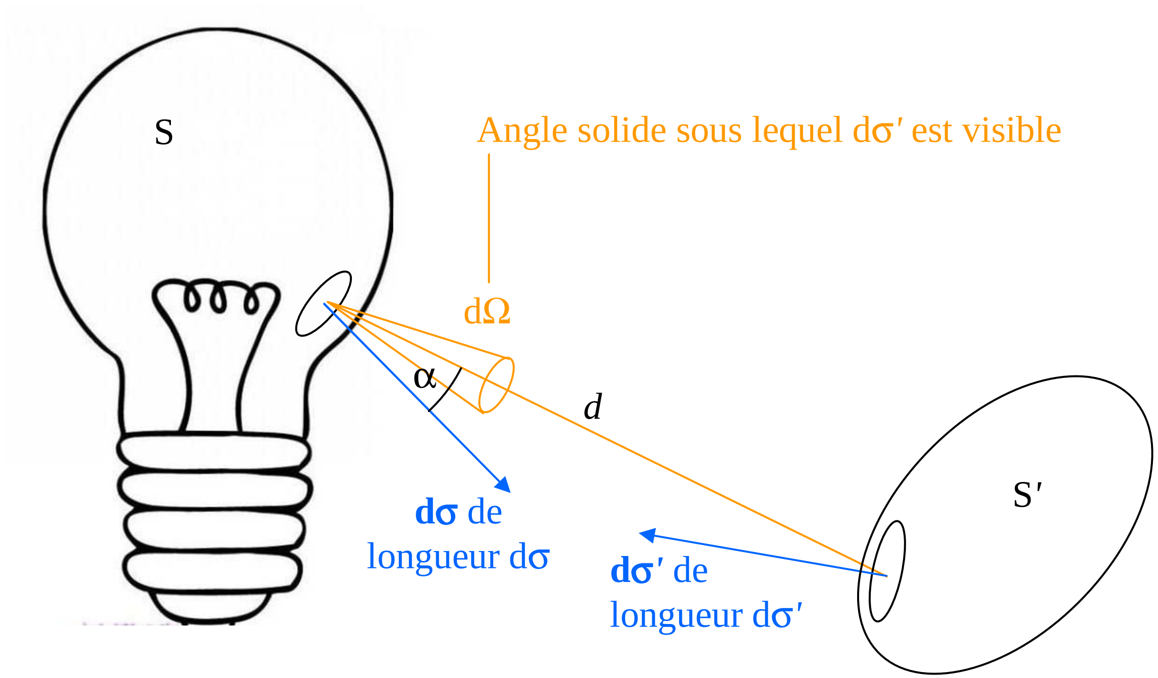
Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



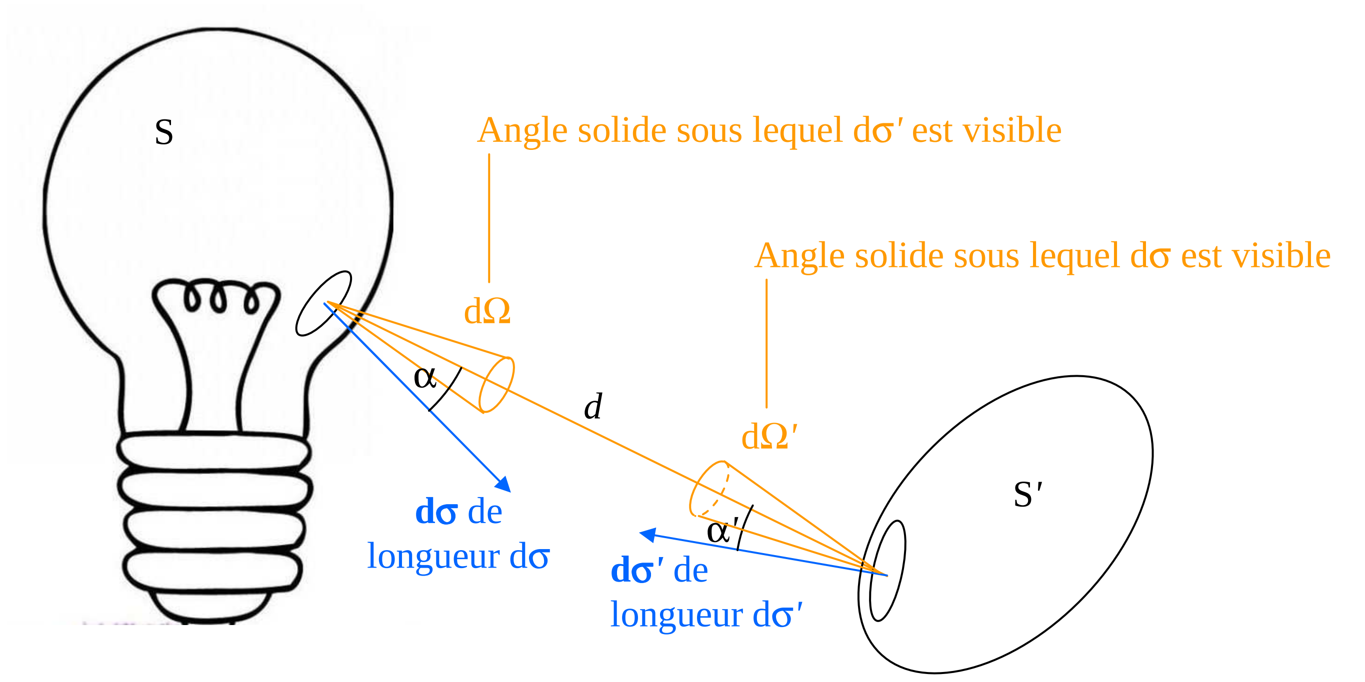
Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



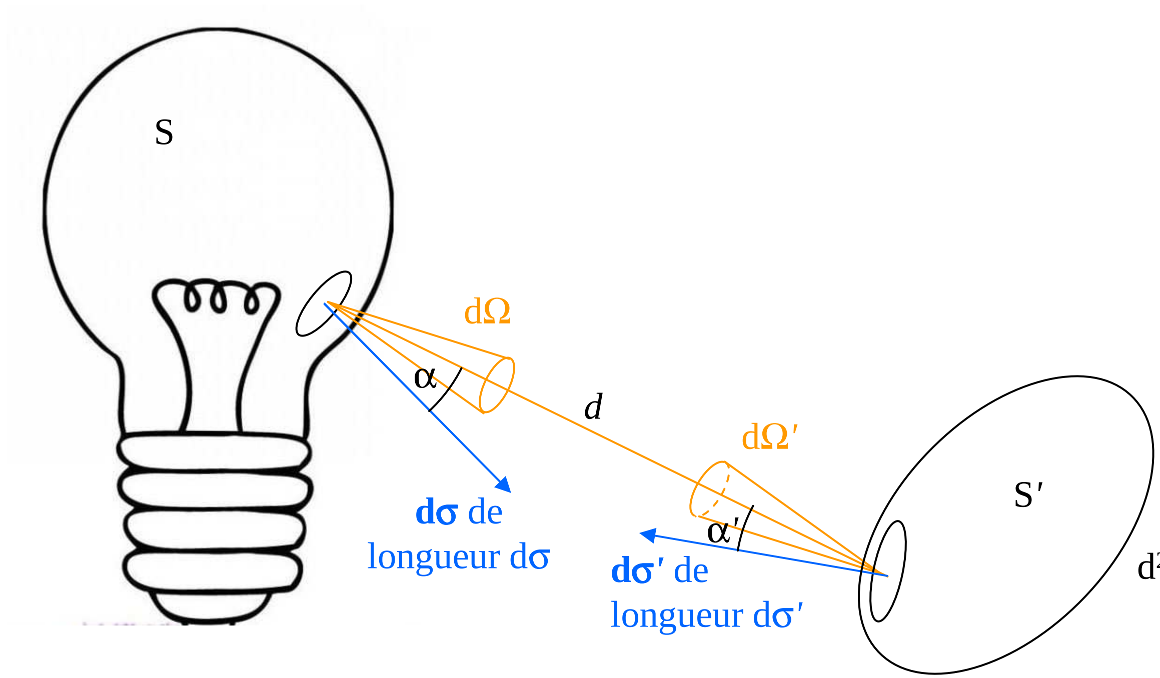
Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



Étendue géométrique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



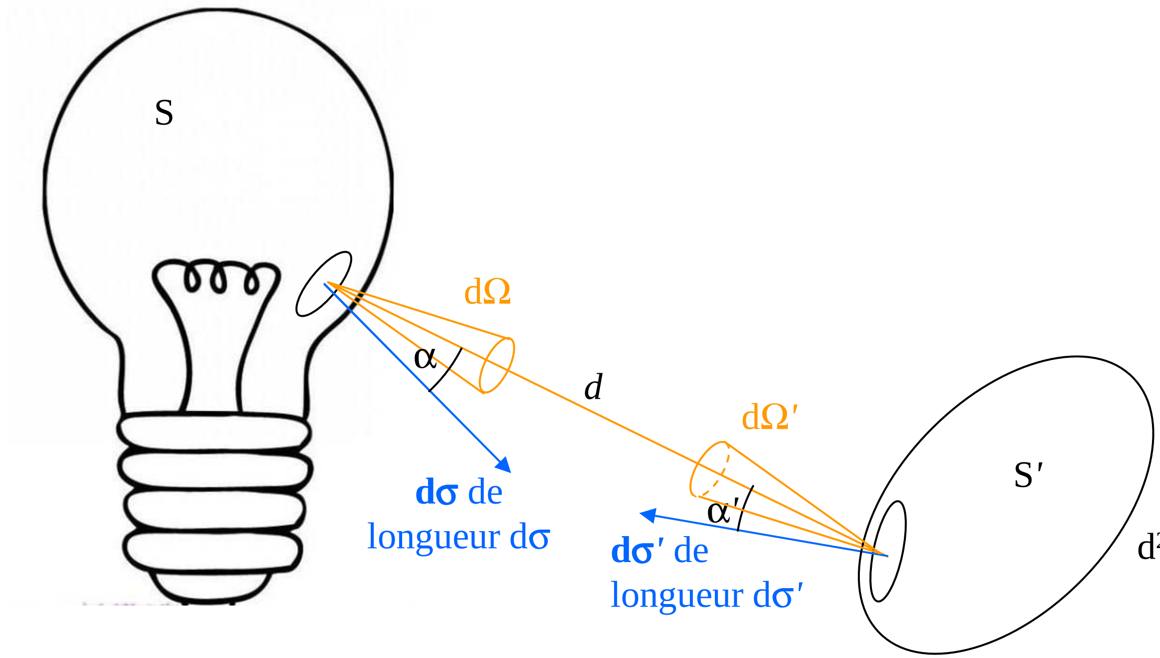
L'étendue géométrique d'un élément de surface dS vers un élément de surface dS′ s'exprime

$$d^2G = d\sigma \cos\alpha \, d\Omega$$

C'est une définition

Étendue géométrique

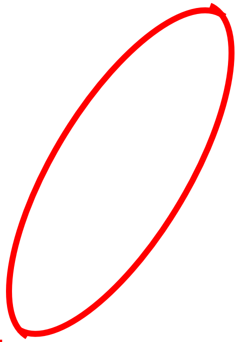
https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tendue_g%C3%A9om%C3%A9trique



L'étendue géométrique d'un élément de surface dS vers un élément de surface dS′ s'exprime

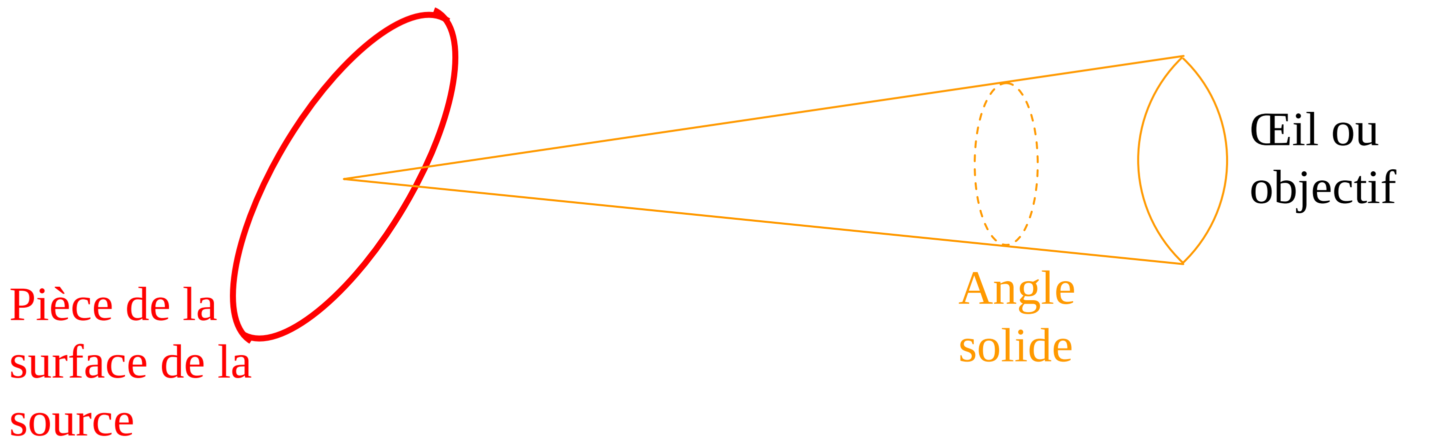
$d^2G = d\sigma \cos\alpha \, d\Omega = d\sigma \cos\alpha \, d\sigma' \cos\alpha' / d^2$

Géométrie de l'émision

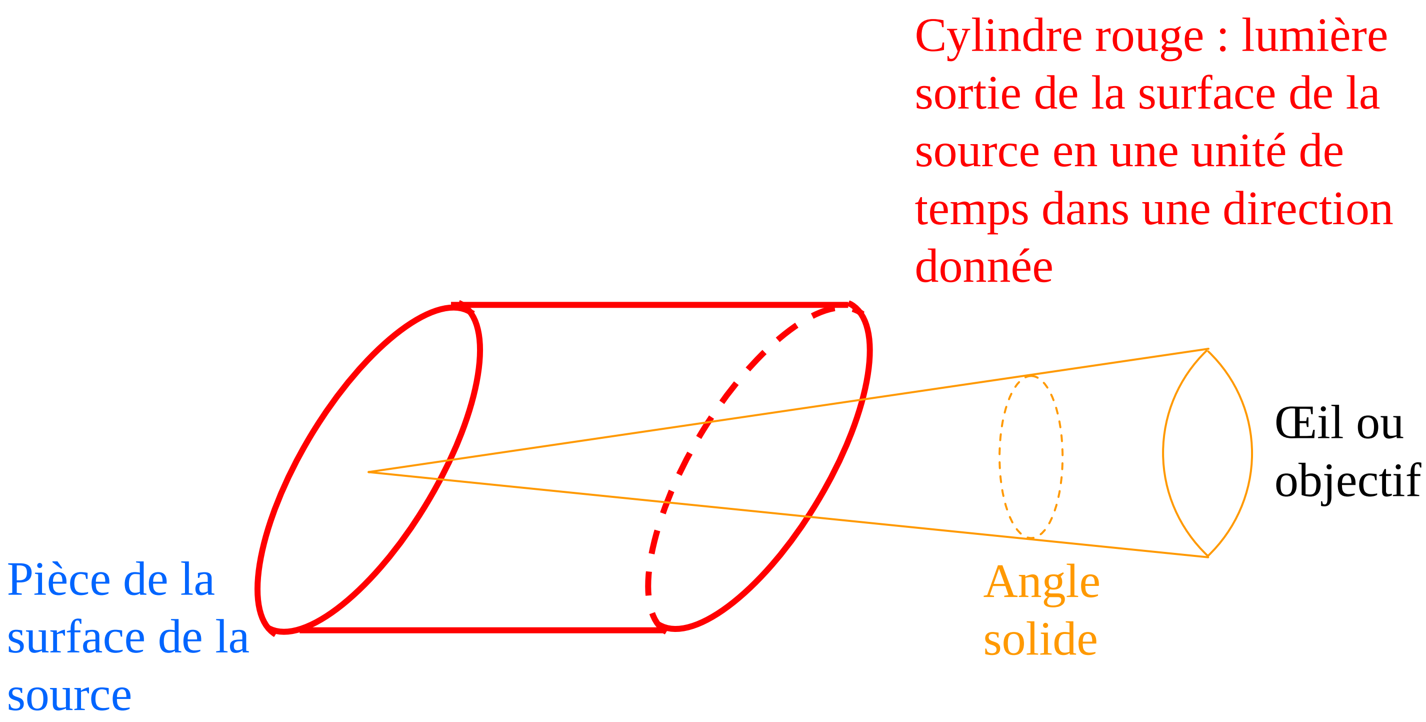


Pièce de la surface de la source

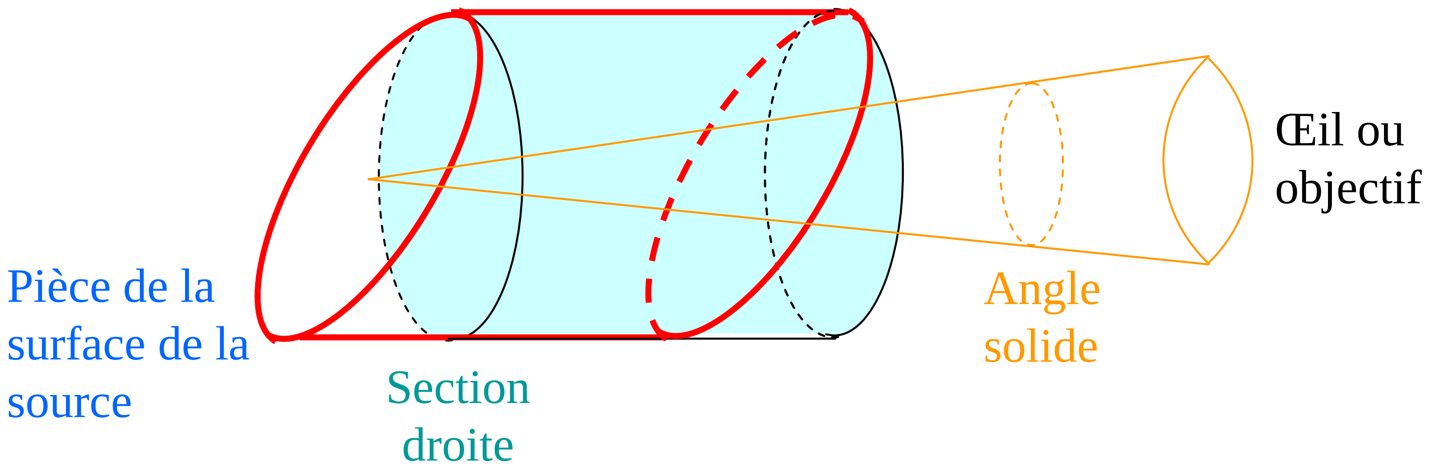
Géométrie de l'émision



Géométrie de l'émission

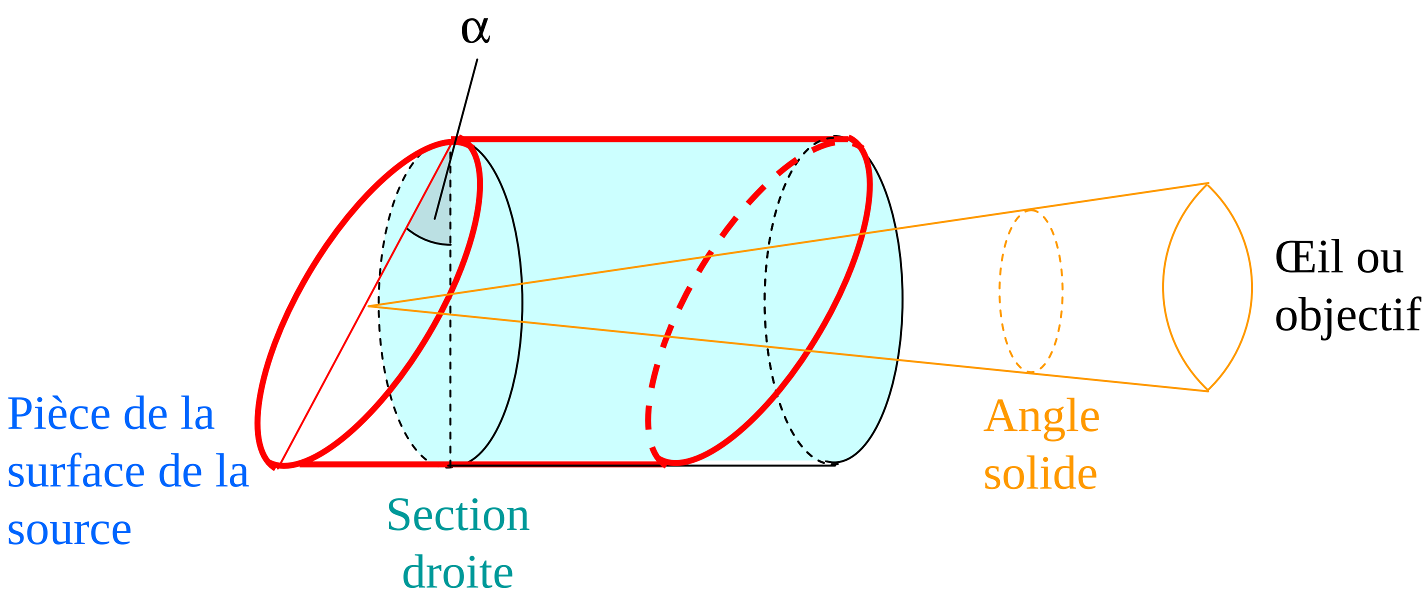


Géométrie de l'émision

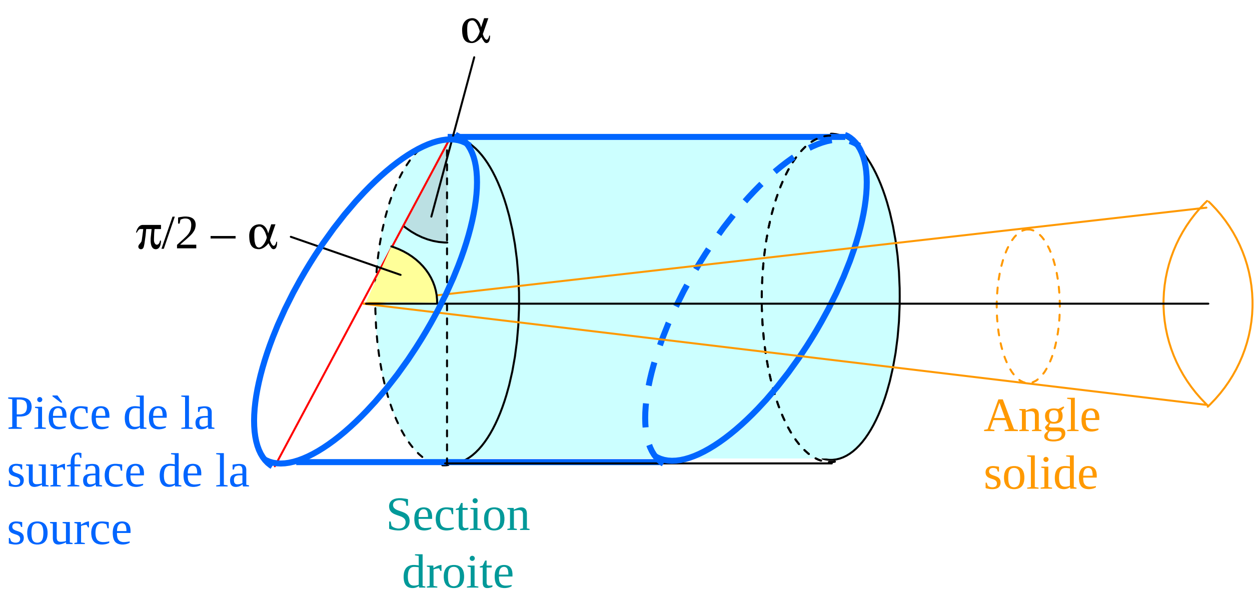


Cylindre bleu : cylindre de
de volume équivalent de
cette lumière dans une
direction donnée

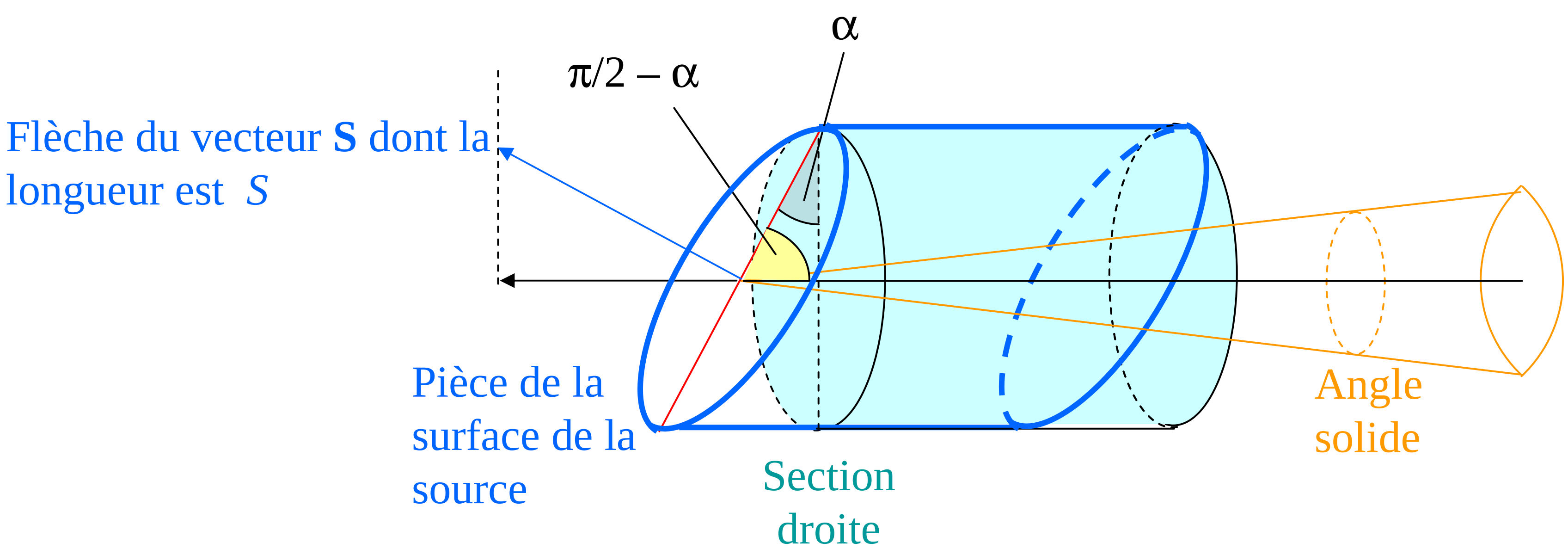
Géométrie de l'émision



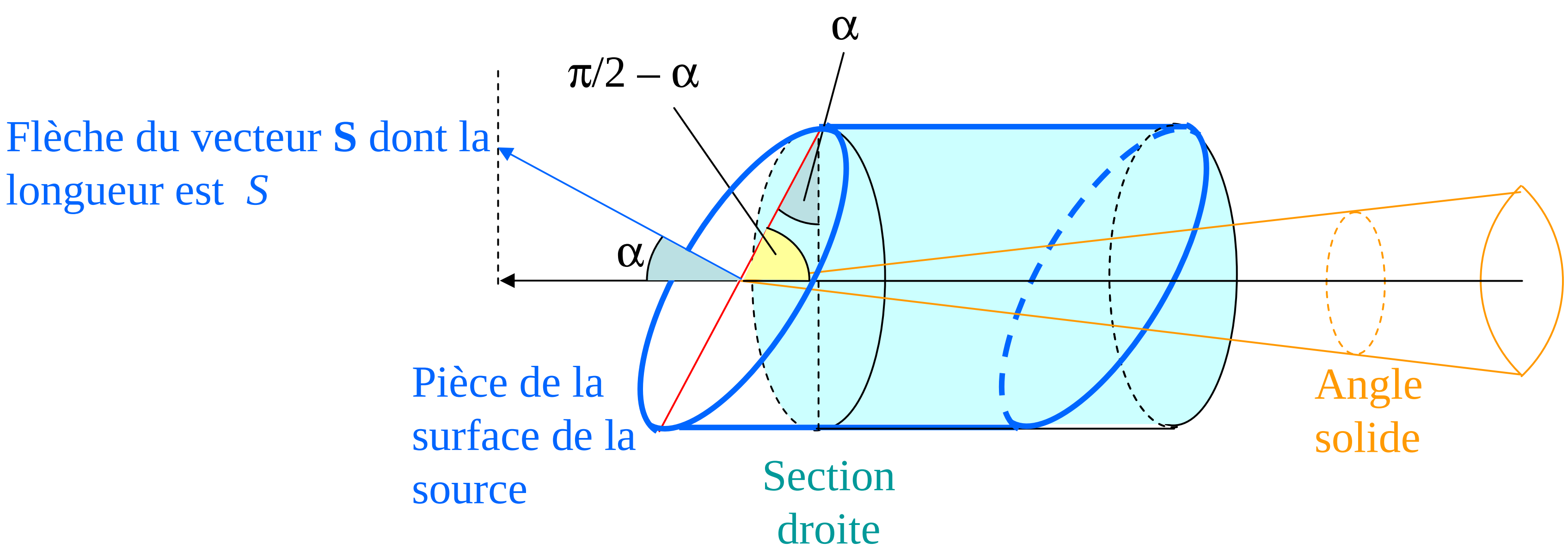
Géométrie de l'émision



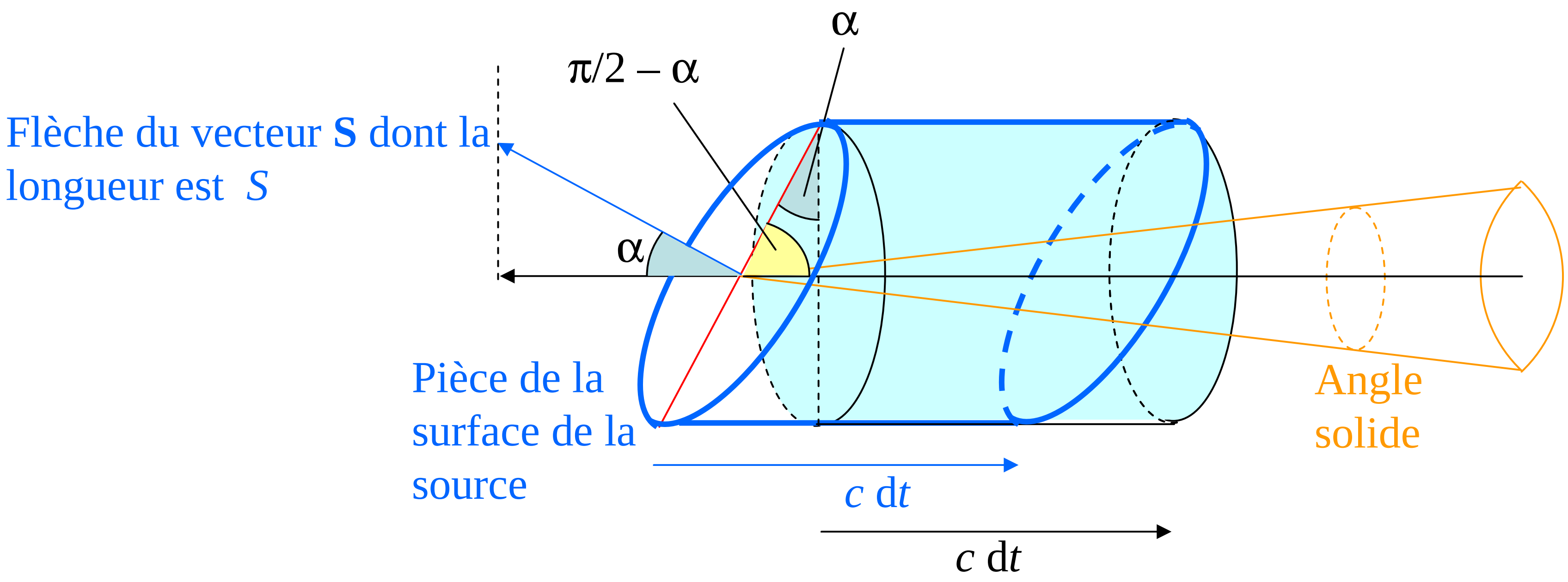
Géométrie de l'émision



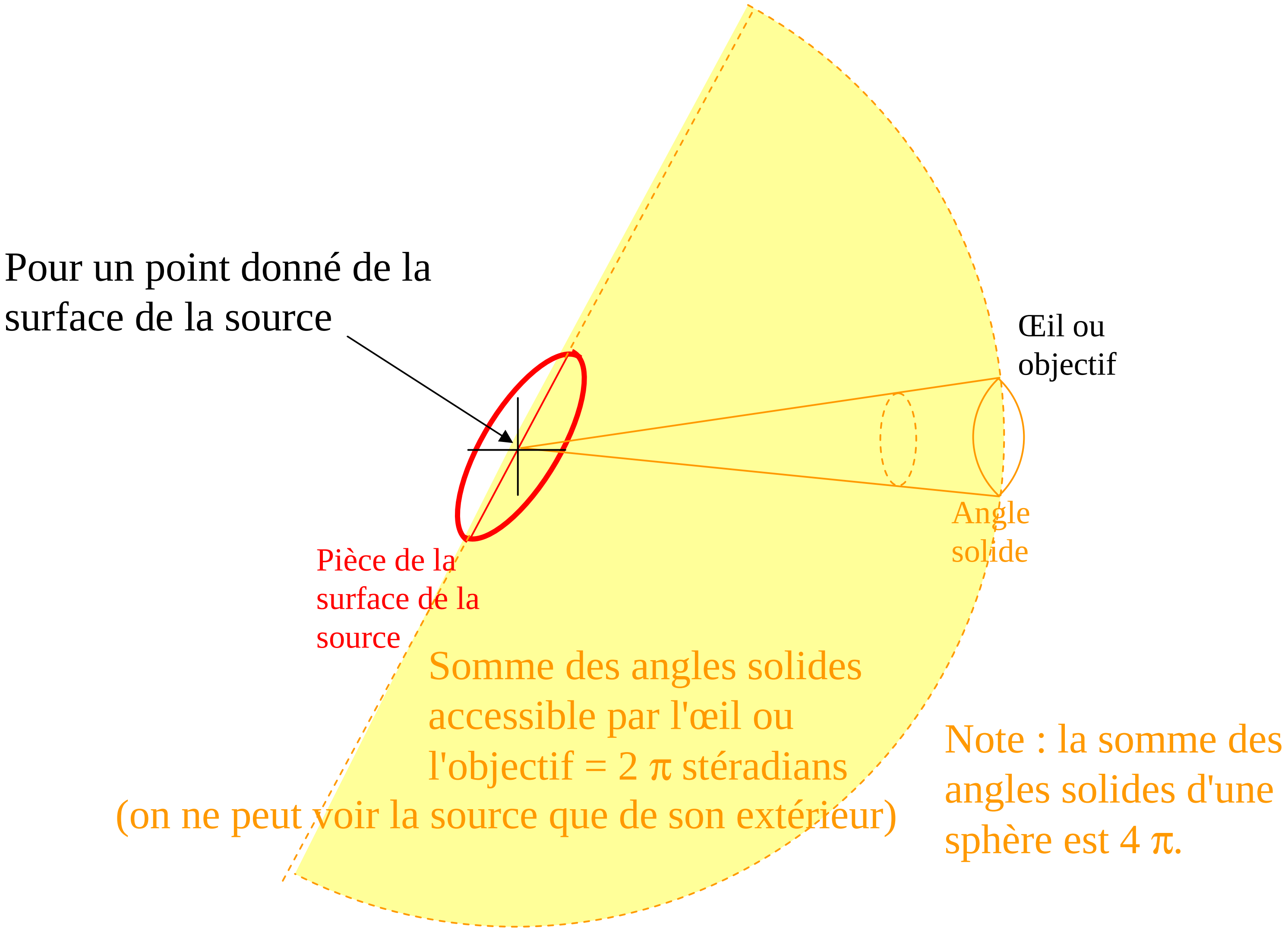
Géométrie de l'émision



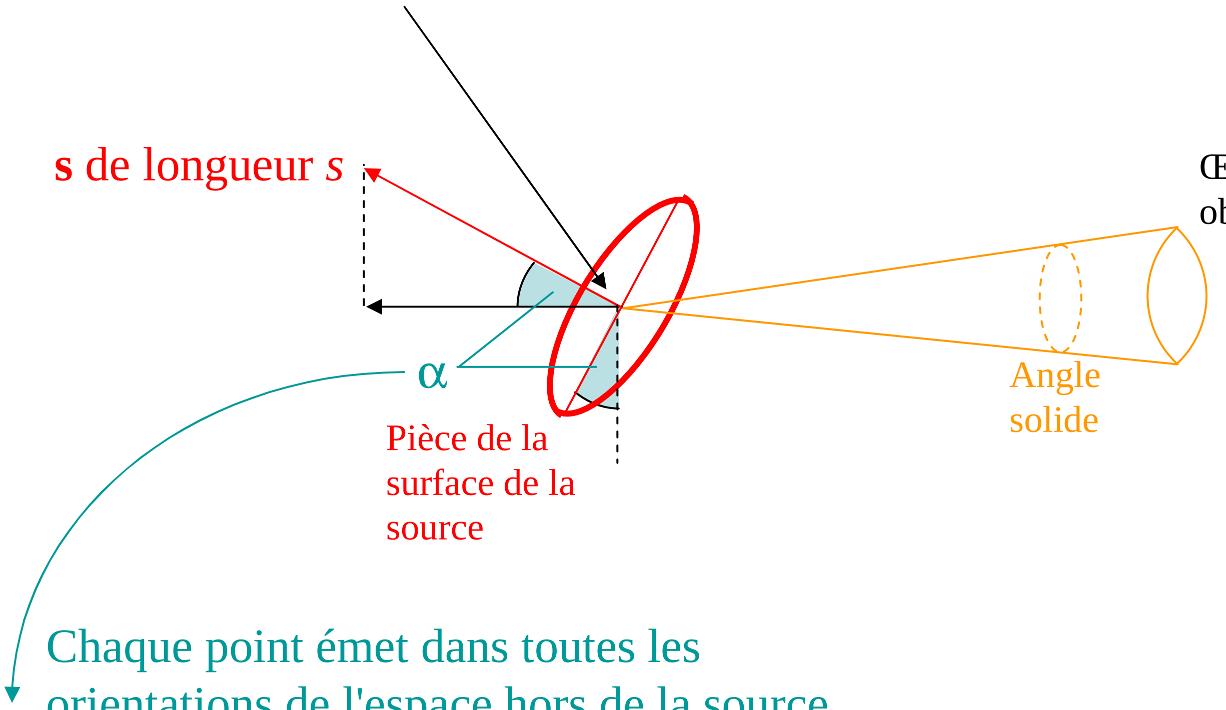
Géométrie de l'émision



Géométrie de l'émision

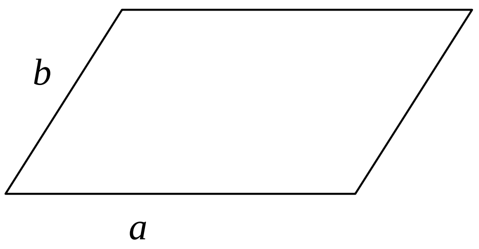


Géométrie de l'émission



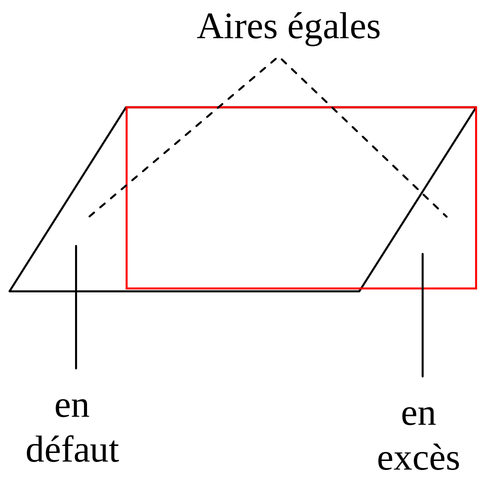
Géométrie des surfaces

Résolution des triangles



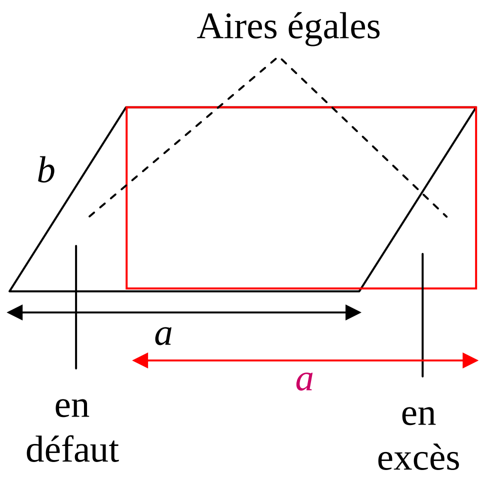
Ceci est un parallélogramme

Résolution des triangles



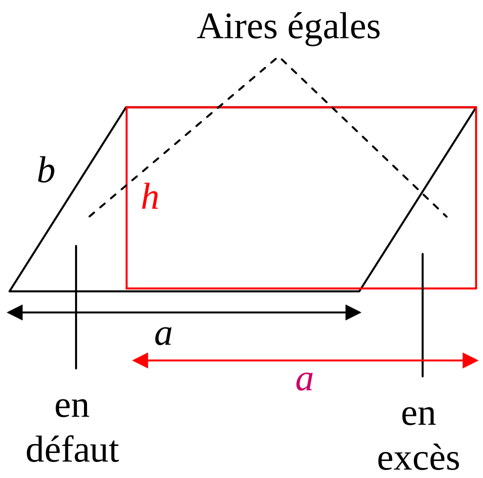
Et ce quadrilatère est un rectangle

Résolution des triangles



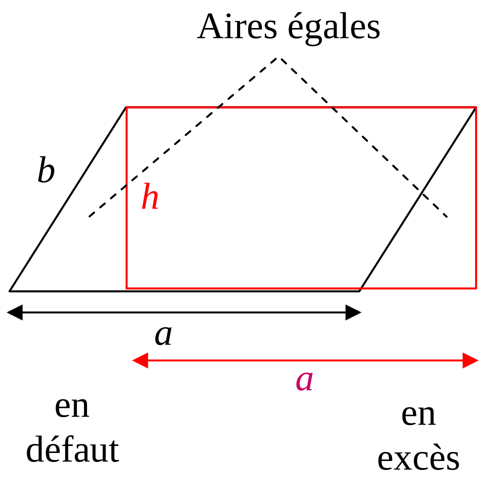
Et ce quadrilatère est un rectangle

Résolution des triangles



Aire du rectangle = $a\ h$

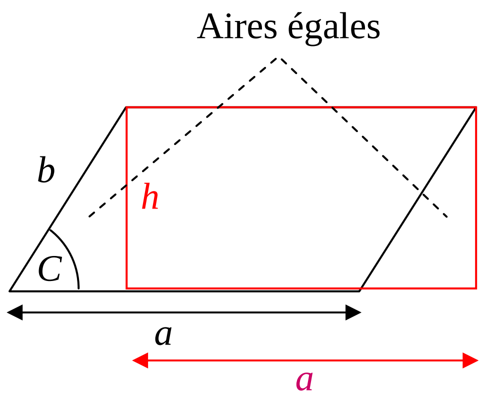
Résolution des triangles



Aire du rectangle = $a\ h$

Aire du parallélogramme = $a\ h$

Résolution des triangles

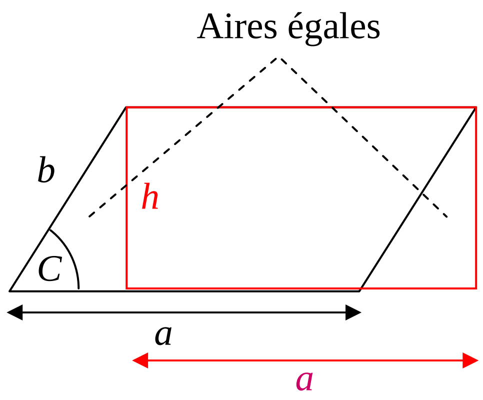


Aire du rectangle = $a\ h$

Aire du parallélogramme = $a\ h$

En trigonométrie sin $C = h\ /\ b$

Résolution des triangles

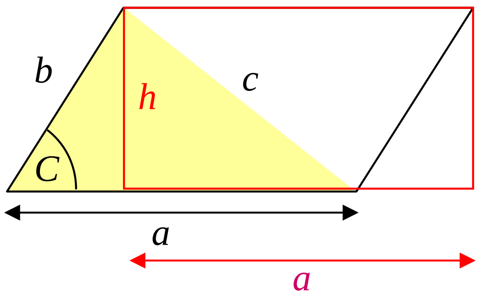


Aire du rectangle = $a\ h$

Aire du parallélogramme = $a\ h$ aussi égale à $a\ b$ sin C

En trigonométrie sin $C = h\ /\ b$

Résolution des triangles



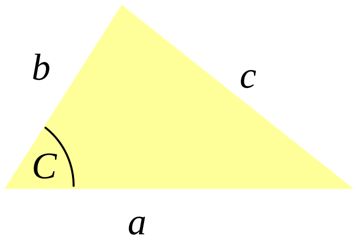
Aire du rectangle = $a\ h$

Aire du parallélogramme = $a\ h$ aussi égale à $a\ b \sin \alpha$

En trigonométrie $\sin C = h / b$

Aire du triangle jaune = aire du parallélogramme / 2 = $a\ b \sin \alpha / 2$

Résolution des triangles



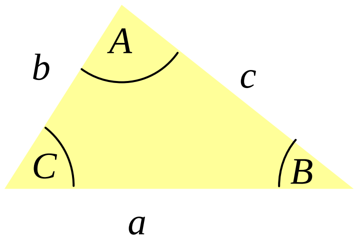
Aire du rectangle = $a\ h$

Aire du parallélogramme = $a\ h$ aussi égale à $a\ b \sin \alpha$

En trigonométrie $\sin \alpha = h / b$

Aire du triangle jaune = aire du parallélogramme / 2 = $a\ b \sin \alpha / 2$

Résolution des triangles



Aire du triangle jaune = aire du parallélogramme / 2 = $a\ b \sin \alpha\ /\ 2$

ou $b\ c \sin A\ /\ 2$

ou $c\ a \sin B\ /\ 2$

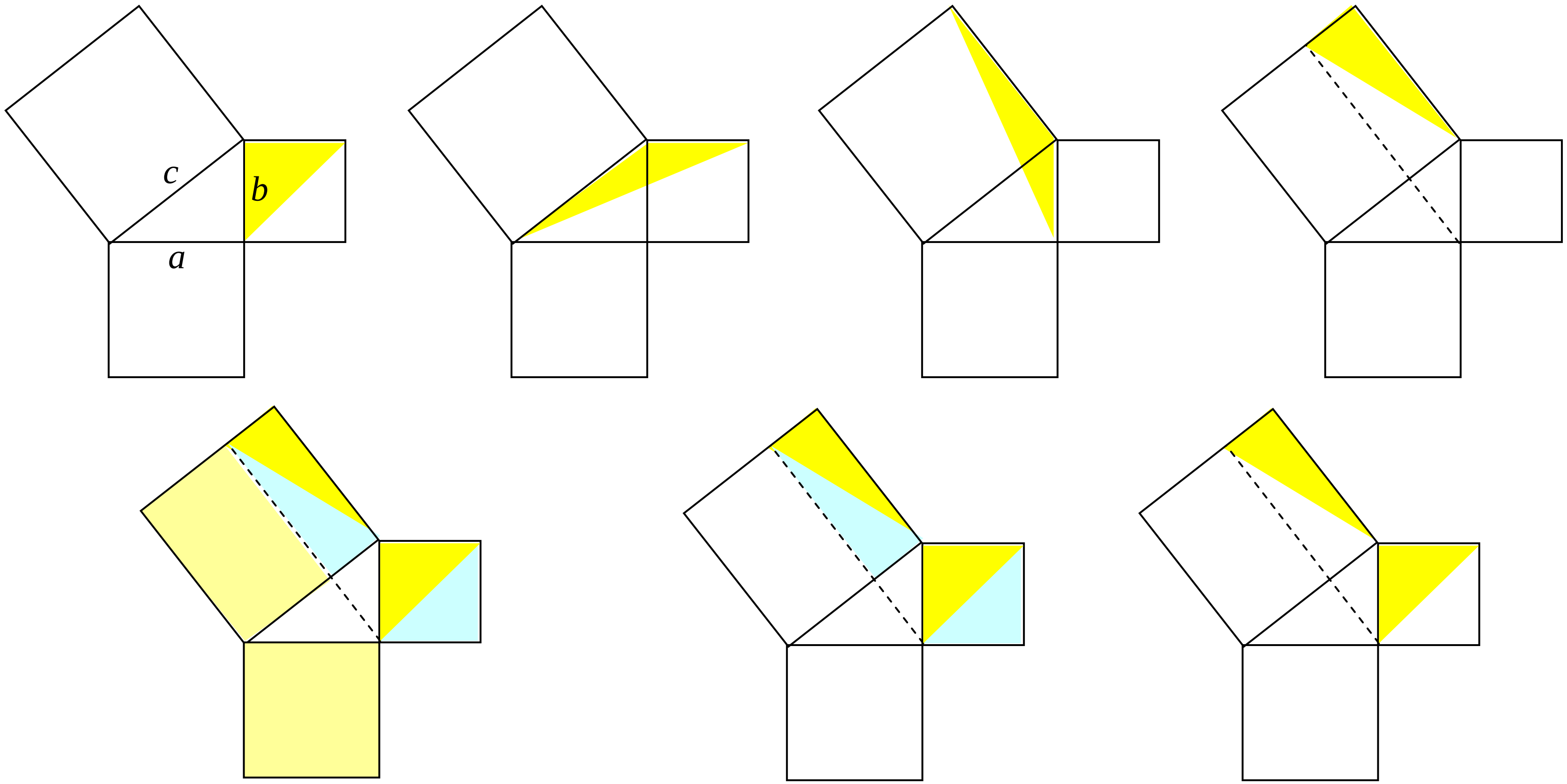
$$a\ b \sin C = b\ c \sin A = c\ a \sin B$$

On divise les trois formules par $a\ b\ c$:

Théorème du sinus $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$

Théorème de Pythagore

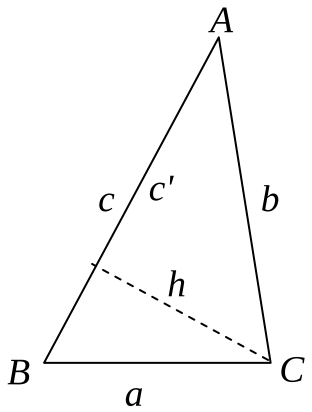
(démonstration entièrement visuelle)



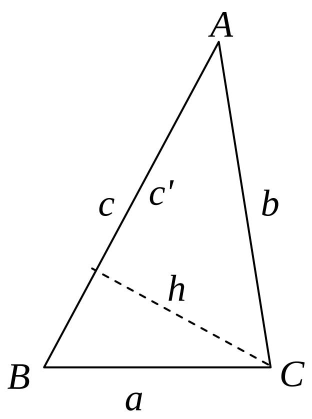
L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux atures cotés

$a^2 + b^2 = c^2$

Résolution des triangles

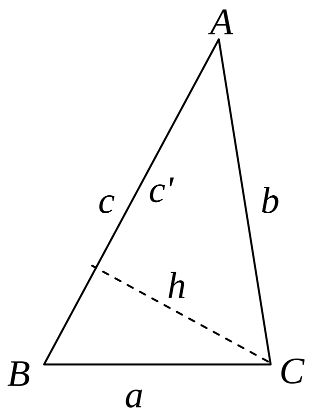


Résolution des triangles



Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

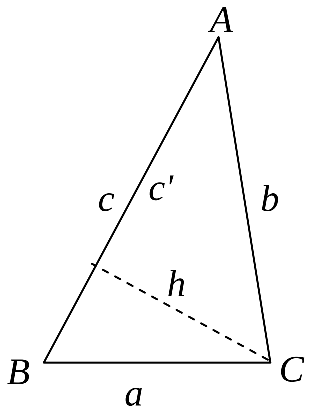
Résolution des triangles



Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

Théorème de Pythagore $h^2 = b^2 - c'^2$

Résolution des triangles

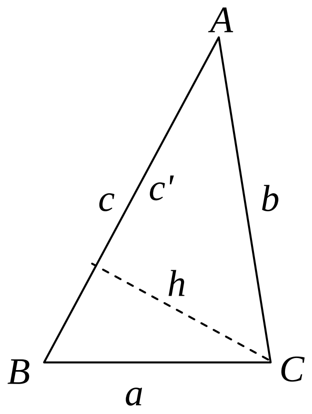


Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

Théorème de Pythagore $h^2 = b^2 - c'^2$

Identité remarquable : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,c'$

Résolution des triangles



Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

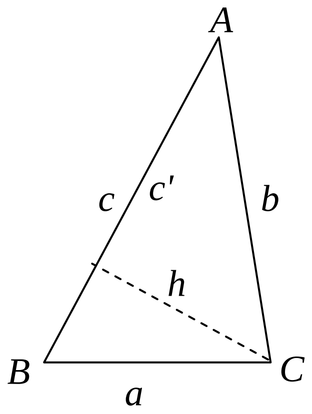
Théorème de Pythagore $h^2 = b^2 - c'^2$

Identité remarquable : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,c'$

Trigonométrie : $c' = b \cos A$

Substitution du double produit : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,b \cos A$

Résolution des triangles



Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

Théorème de Pythagore $h^2 = b^2 - c'^2$

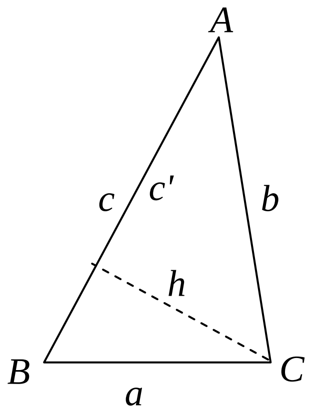
Identité remarquable : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,c'$

Trigonométrie : $c' = b \cos A$

Substitution du double produit : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,b \cos A$

Substitution de h^2 : $a^2 = b^2 - c'^2 + c^2 + c'^2 - 2\,b\,c \cos A$

Résolution des triangles



Théorème de Pythagore $a^2 = h^2 + (c - c')^2$

Théorème de Pythagore $h^2 = b^2 - c'^2$

Identité remarquable : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,c'$

Trigonométrie : $c' = b \cos A$

Substitution du double produit : $a^2 = h^2 + c^2 + c'^2 - 2\,c\,b \cos A$

Substitution de h^2 : $a^2 = b^2 - c'^2 + c^2 + c'^2 - 2\,b\,c \cos A$

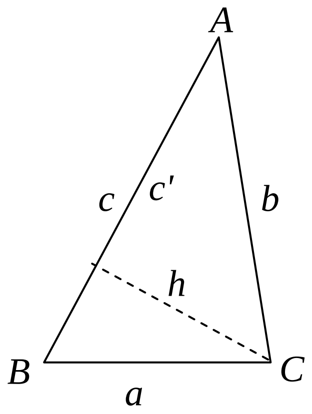
Théorème du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$

Permutation circulaire

$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C$

Produit scalaire



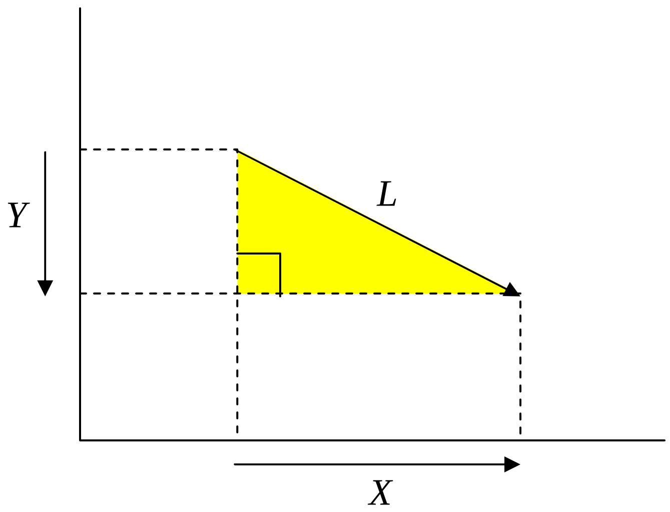
Théorème du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Théorème du cosinus : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\, AC\, AB \cos A$

Définition du **produit scalaire** $b\, c \cos A =$ **AB AC**

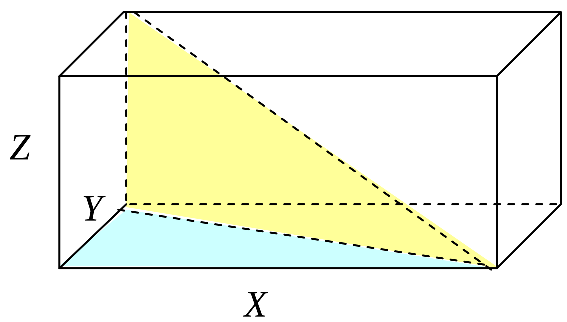
Théorème du cosinus : $\dfrac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$

Distance en 2 D

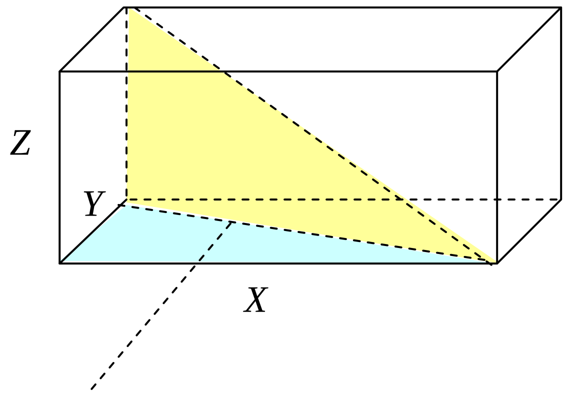


Théorème de Pythagore : $L^2 = X^2 + Y^2$

Distance en 3 D

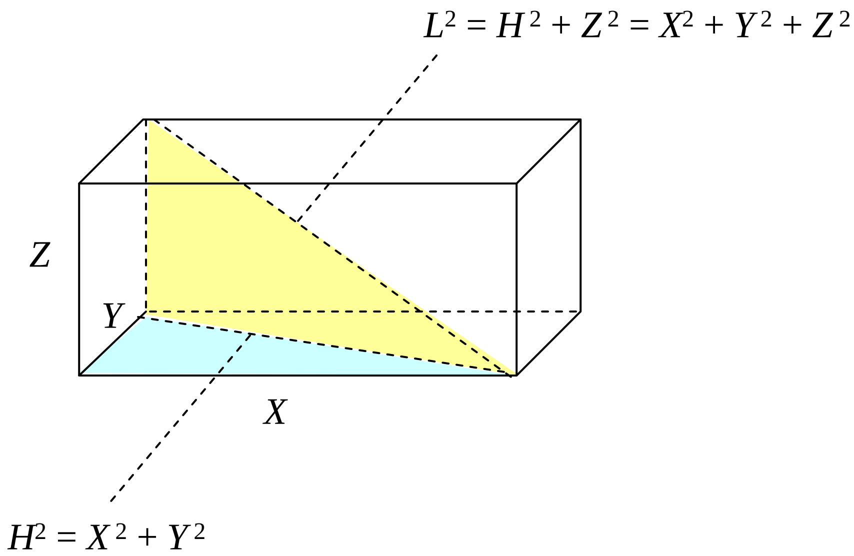


Distance en 3 D

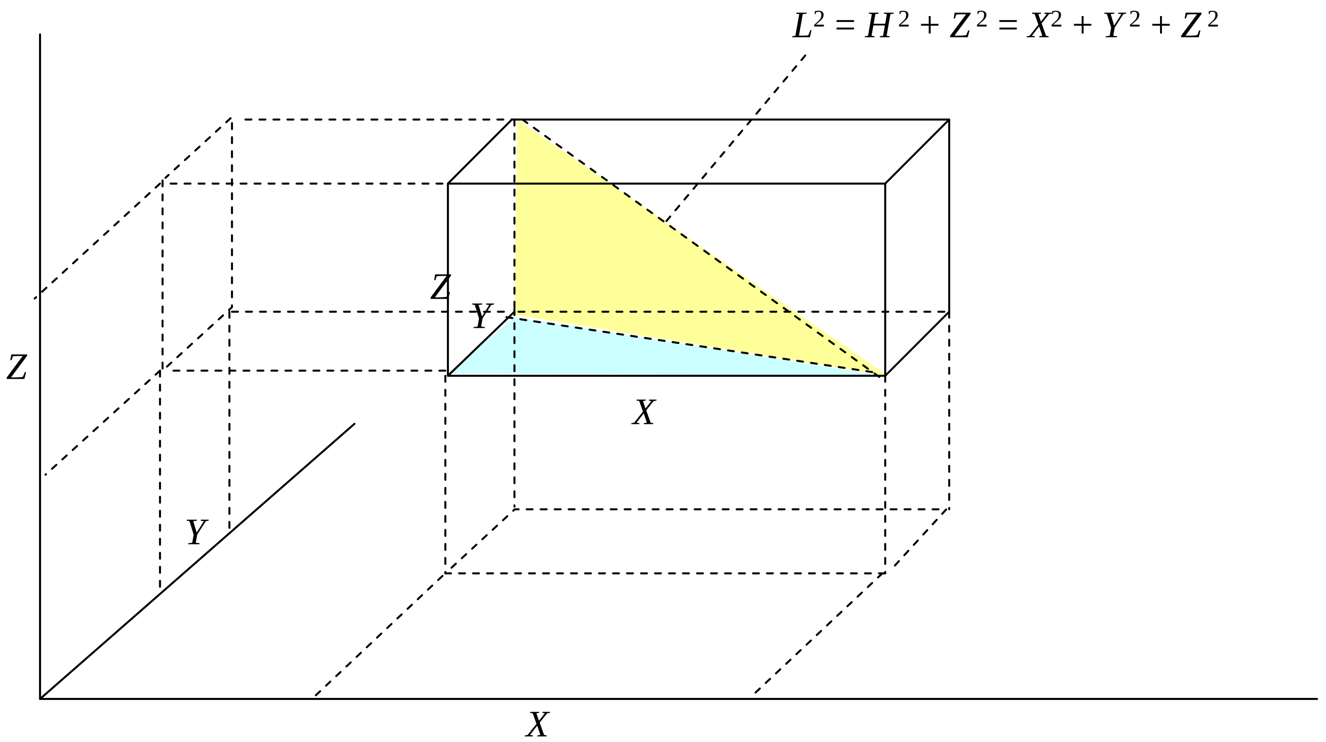


$H^2 = X^2 + Y^2$

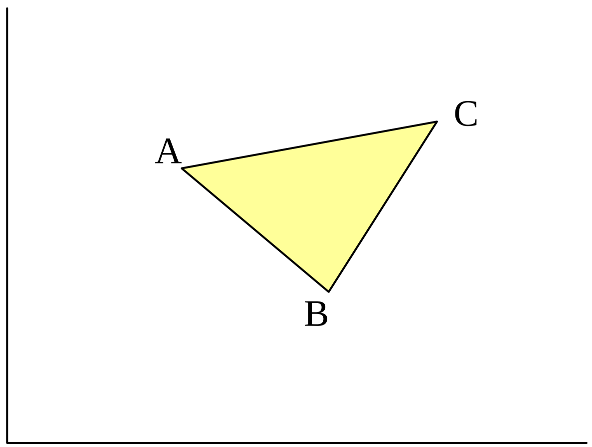
Distance en 3 D



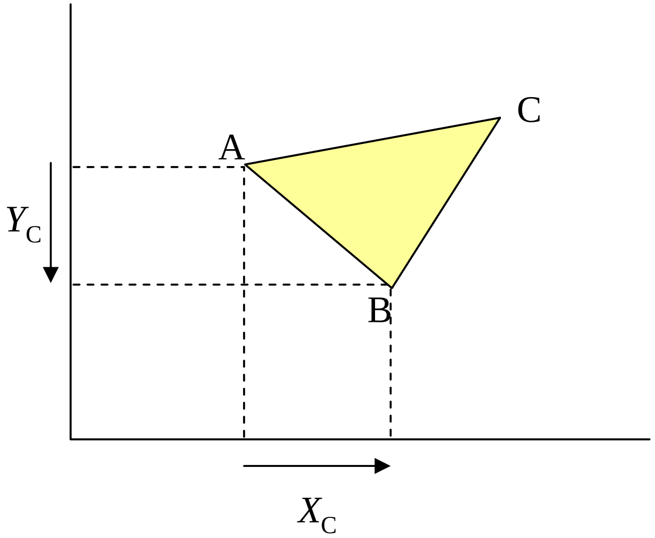
Distance en 3 D



Aires en 2D

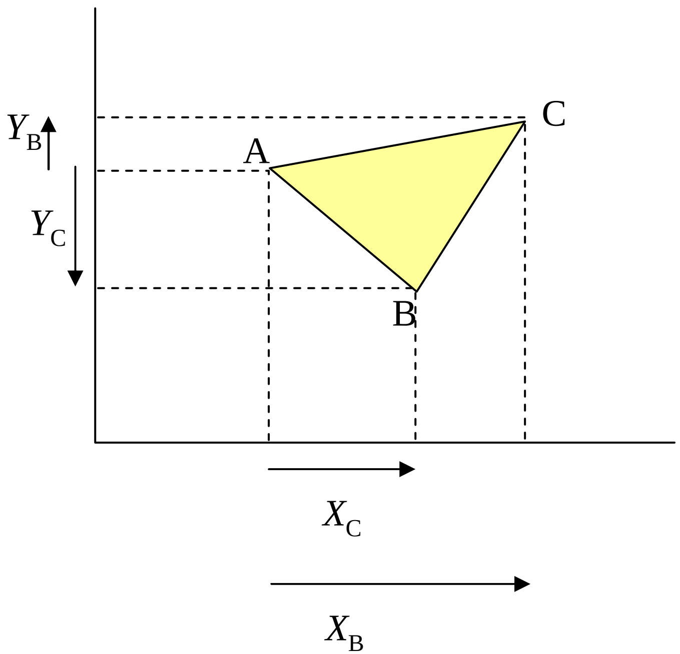


Aires en 2D



$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$$

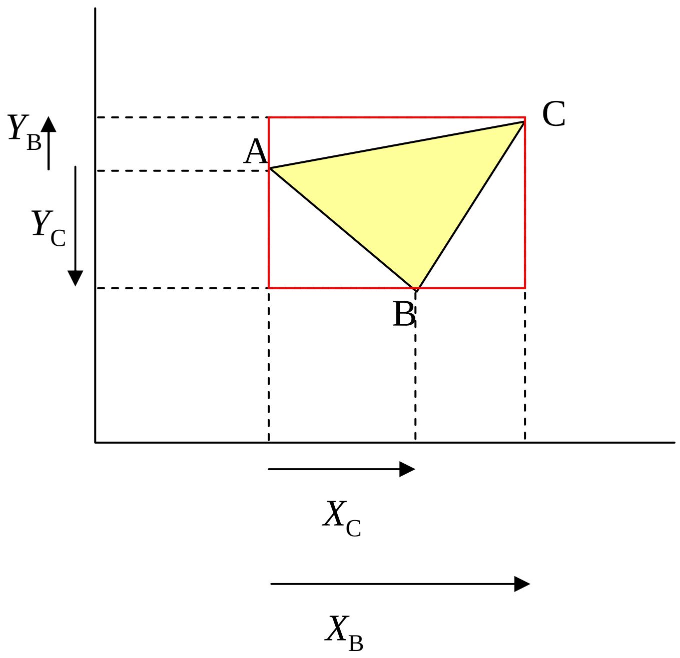
Aires en 2D



$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$$

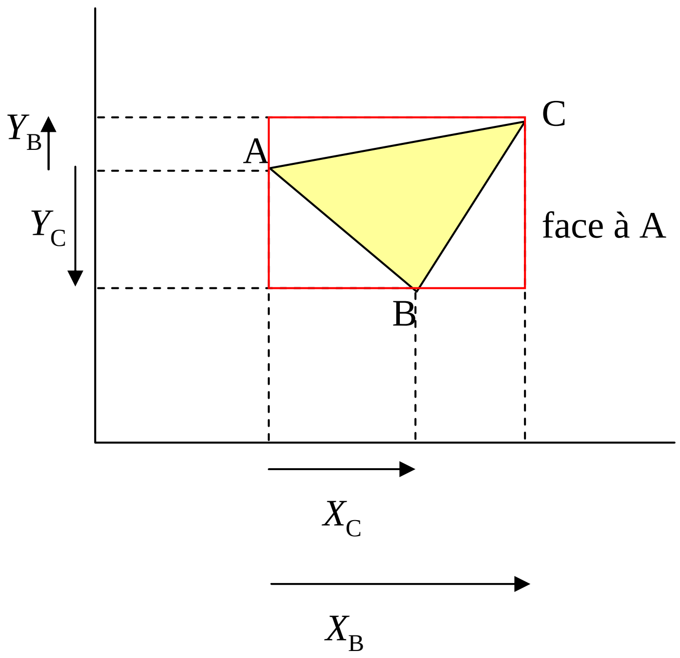
Aires en 2D

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$



$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$$

Aires en 2D



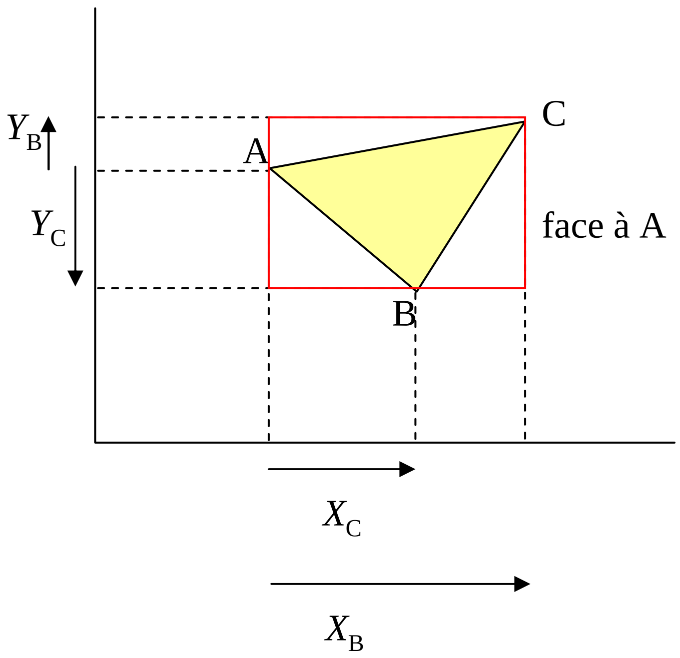
Aire du rectangle = $X_B\ (Y_B - Y_C) = X_B\ Y_B - X_B\ Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\ (Y_B - Y_C)\ /\ 2$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$$

Aires en 2D



Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

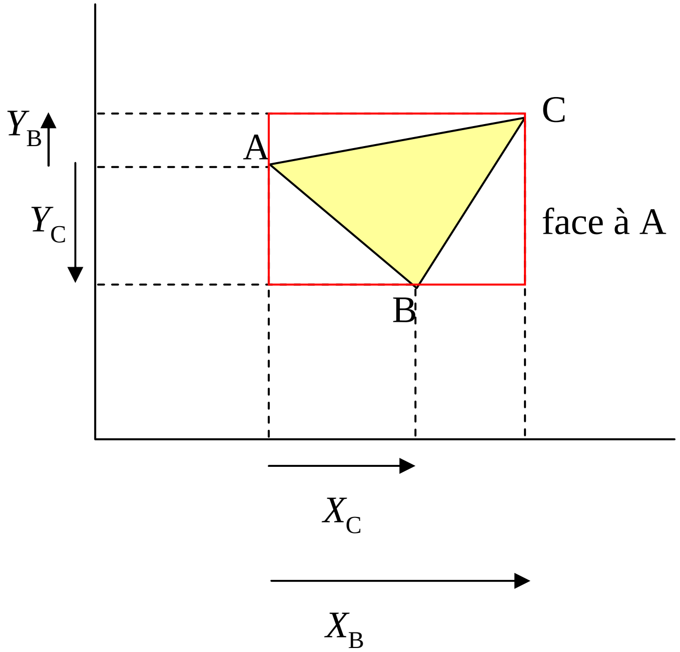
Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$

$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aires en 2D



Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

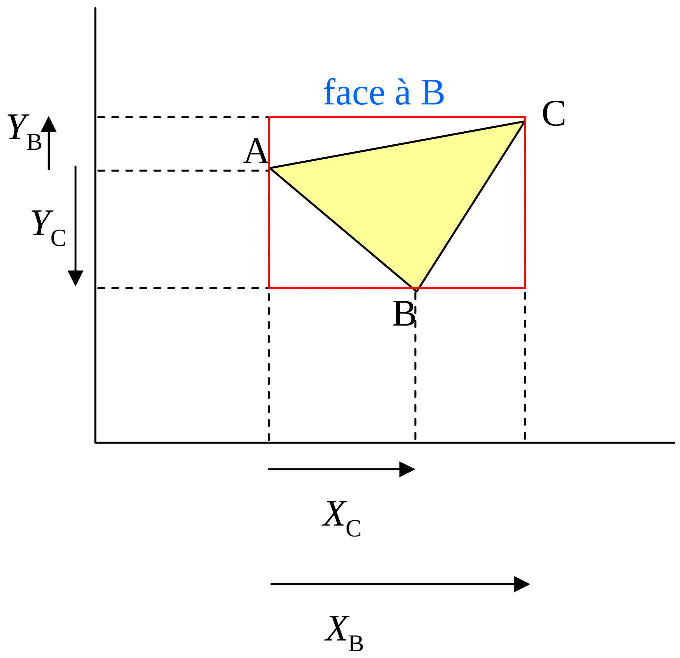
face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$

$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$

$= X_B\,Y_B/2 - X_B\,Y_C/2 - X_C\,Y_B/2 + X_C\,Y_C/2$

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aires en 2D



$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

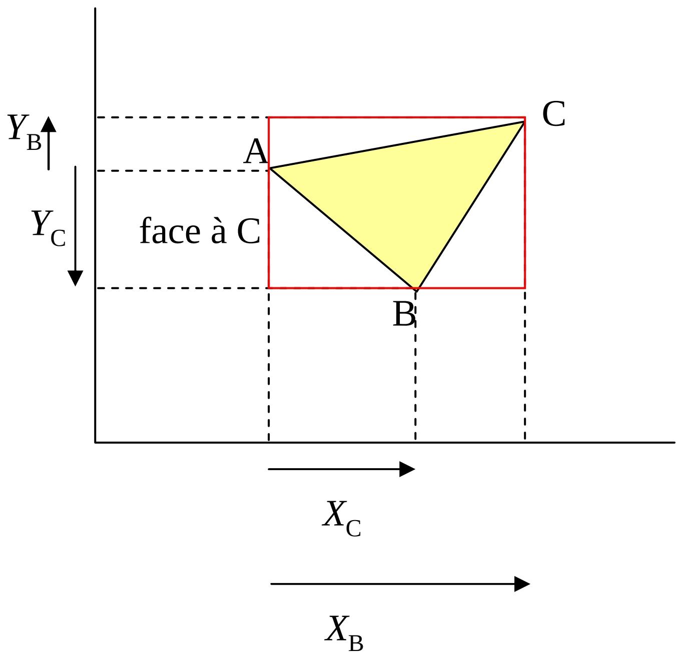
Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$
$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$
$= X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + X_C\,Y_C\,/\,2$

face à B = $X_B\,Y_B\,/\,2$

Aires en 2D



$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

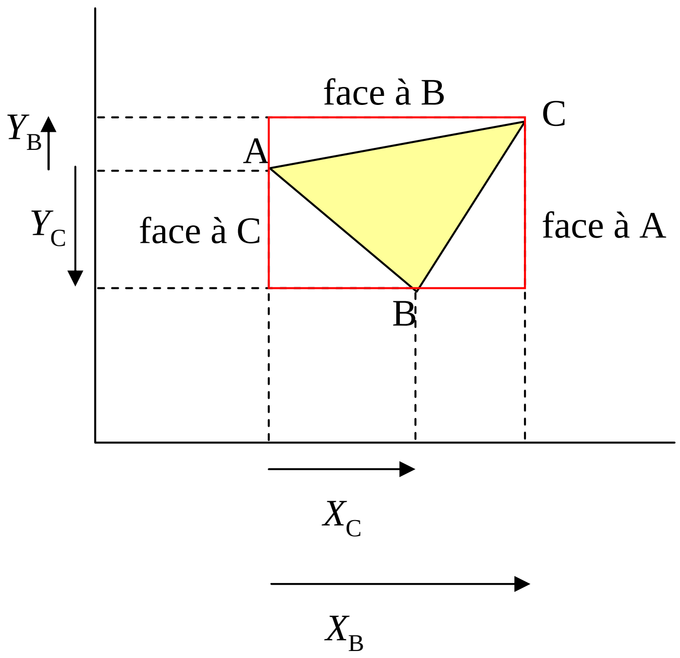
Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$
$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$
$= X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + X_C\,Y_C\,/\,2$

face à B = $X_B\,Y_B\,/\,2$

face à C = $-\,X_C\,Y_C\,/\,2$

Aires en 2D



$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$$

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$

$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$

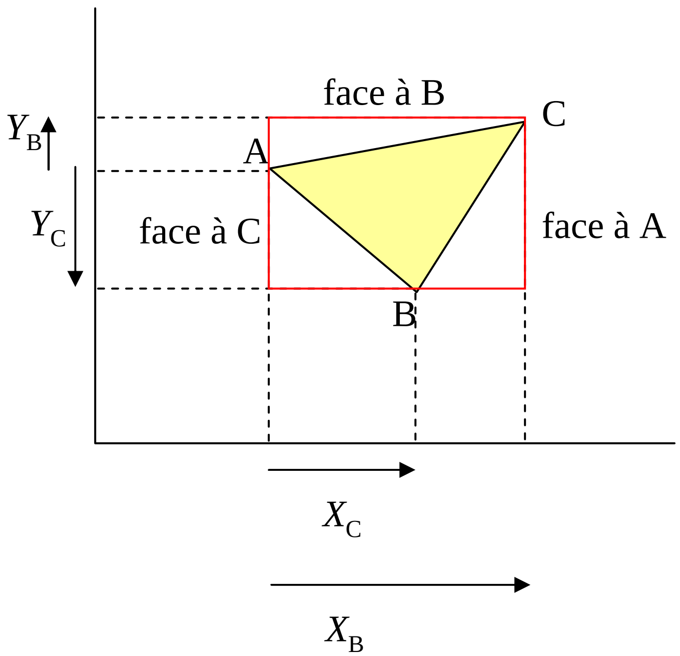
$= X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + \cancel{X_C\,Y_C}\,/\,2$

face à B = $X_B\,Y_B\,/\,2$

face à C = $-\,\cancel{X_C\,Y_C}\,/\,2$

total = $X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + X_B\,Y_B\,/\,2$

Aires en 2D



$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = \cancel{X_B\,Y_B} - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$

$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$

$= X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + X_C\,Y_C\,/\,2$

face à B = $X_B\,Y_B\,/\,2$

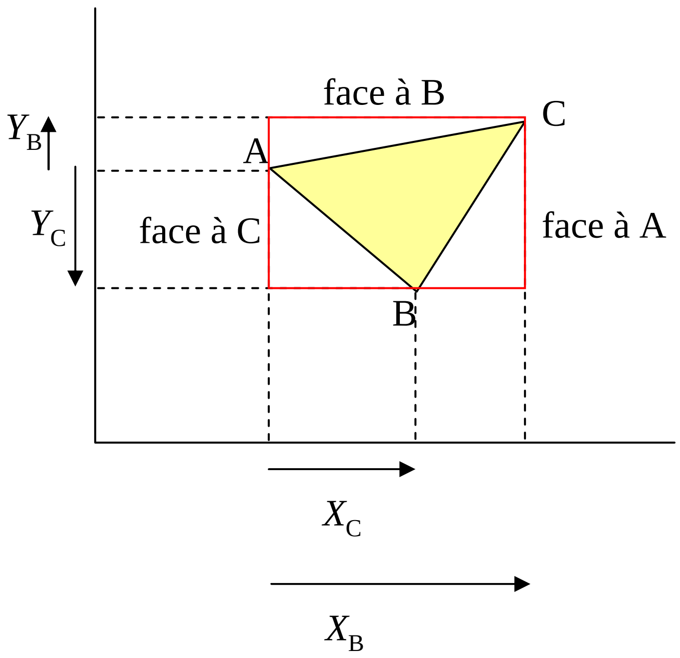
face à C = $-\,X_C\,Y_C\,/\,2$

total = $\cancel{X_B\,Y_B\,/\,2} - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + \cancel{X_B\,Y_B\,/\,2}$

L'aire de la surface jaune est la différence entre celle du rectangle et le total des aires complémentaires

Aire de ABC = $-\,X_B\,Y_C + X_B\,Y_C\,/\,2 + X_C\,Y_B\,/\,2$

Aires en 2D



$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C\,)\,/\,2$

$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$

$= X_B\,Y_B\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + \cancel{X_C\,Y_C}\,/\,2$

face à B = $X_B\,Y_B\,/\,2$

face à C = $-\,\cancel{X_C\,Y_C}\,/\,2$

total = $\underline{X_B\,Y_B}\,/\,2 - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2 + \underline{X_B\,Y_B}\,/\,2$

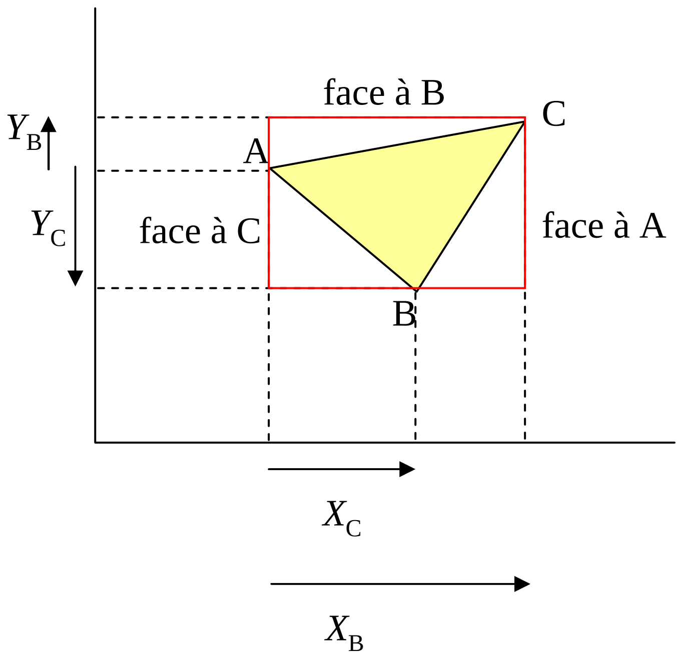
$= X_B\,Y_B - X_B\,Y_C\,/\,2 - X_C\,Y_B\,/\,2$

L'aire de la surface jaune est la différence entre celle du rectangle et le total soit

Aire de ABC = $-\,X_B\,Y_C + X_B\,Y_C\,/\,2 + X_C\,Y_B\,/\,2$

Aire de ABC = $-\,X_B\,Y_C\,/\,2 + X_B\,Y_C\,/\,2$

Aires en 2D



$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$ $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix}$

Aire du rectangle = $X_B\,(Y_B - Y_C) = X_B\,Y_B - X_B\,Y_C$

Aires complémentaires

face à A = $(X_B - X_c)\,(Y_B - Y_C)\,/\,2$
$= (X_B\,Y_B - X_B\,Y_C - X_C\,Y_B + X_C\,Y_C)\,/\,2$
$= X_B\,Y_B / 2 - X_B\,Y_C / 2 - X_C\,Y_B / 2 + \cancel{X_C\,Y_C} / 2$

face à B = $X_B\,Y_B / 2$

face à C = $- \cancel{X_C\,Y_C} / 2$

total = $\underline{X_B\,Y_B / 2} - X_B\,Y_C / 2 - X_C\,Y_B / 2 + \underline{X_B\,Y_B / 2}$

$= X_B\,Y_B - X_B\,Y_C / 2 - X_C\,Y_B / 2$

L'aire de la surface jaune est la différence entre celle du rectangle et le total soit

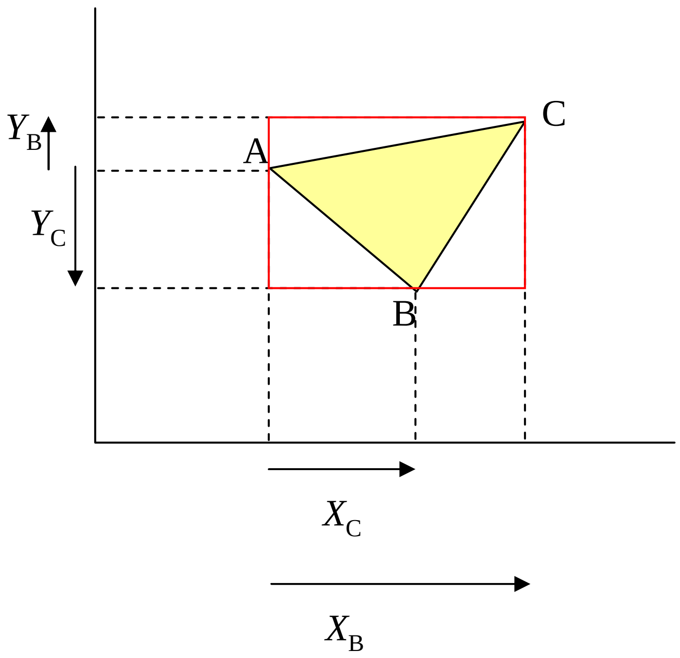
Aire de ABC = $- X_B\,Y_C + X_B\,Y_C / 2 + X_C\,Y_B / 2$

Aire de ABC = $- X_B\,Y_C / 2 + X_B\,Y_C / 2$

Code d'écriture mathématique

Aire de ABC $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} X_C & X_B \\ Y_C & Y_B \end{vmatrix}$ = det ($\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$)

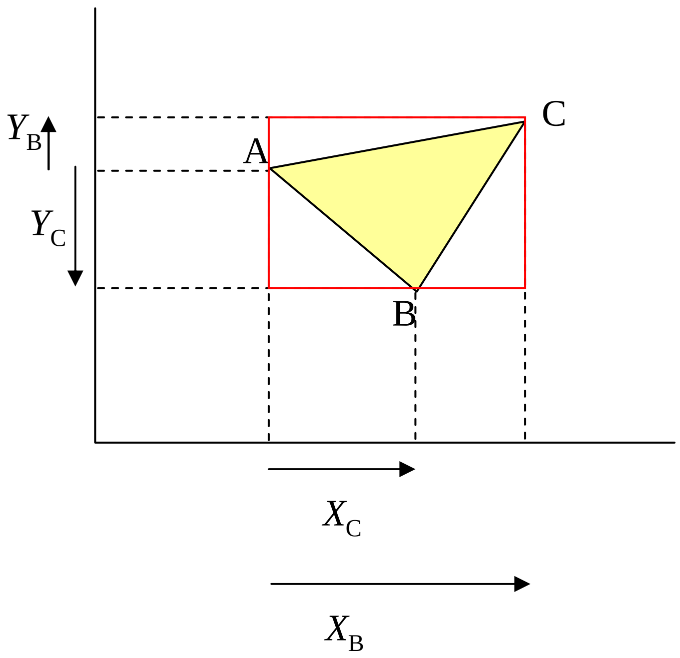
Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

Produit scalaire en 2D

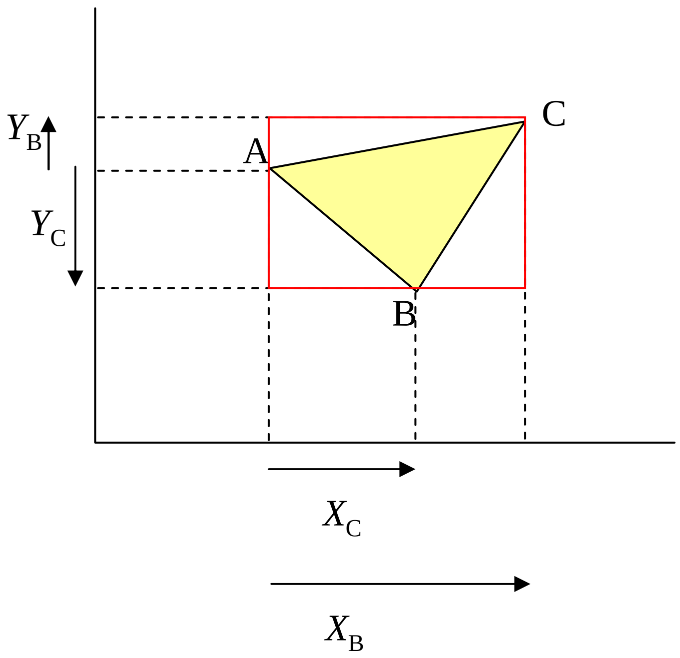


Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB}\ \mathbf{AC}$$

On double $\quad AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\ \mathbf{AB}\ \mathbf{AC}$

Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

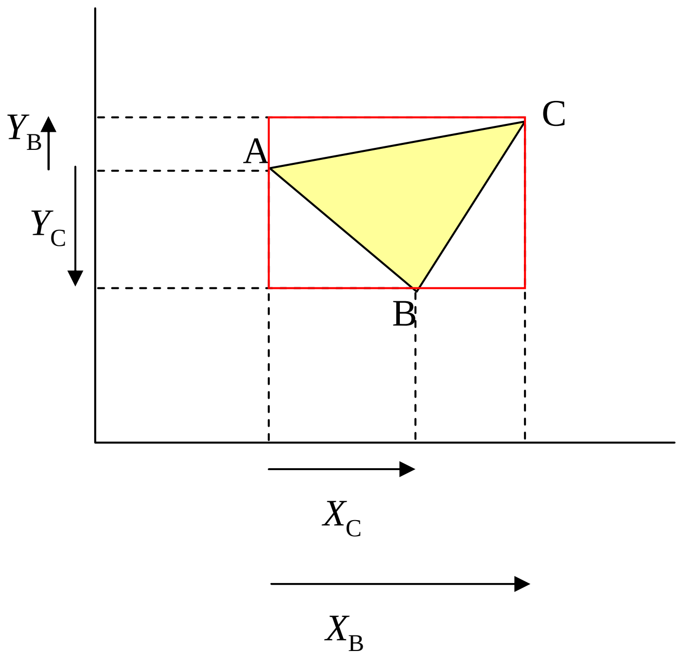
$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

On double $AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

Théorème de Pythagore

$$BC^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2$$

Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

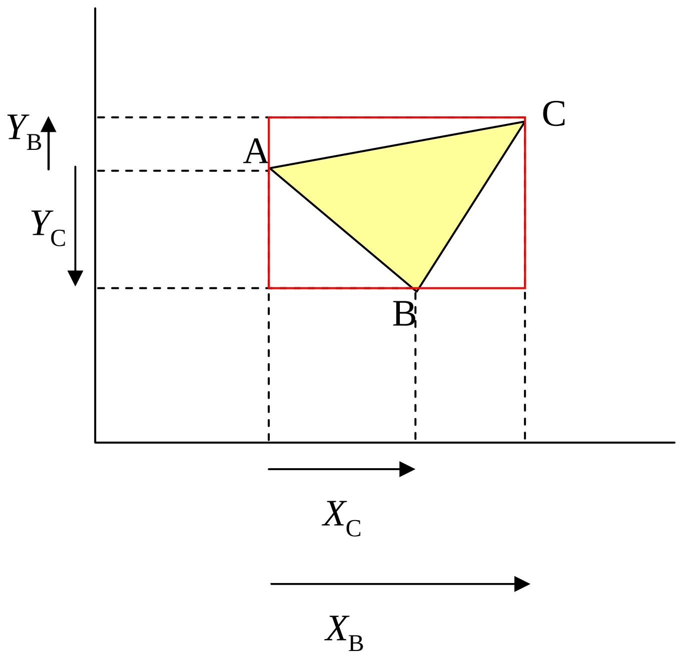
$$\frac{BC^{2} - AC^{2} - AB^{2}}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

On double $\quad AB^{2} - AC^{2} - AB^{2} = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

Théorème de Pythagore

$$BC^{2} = (X_B - X_C)^{2} + (Y_B - Y_C)^{2}$$
$$= X_B^{2} + X_C^{2} - 2\ X_B\ X_C + Y_B^{2} + Y_C^{2} - 2\ Y_B\ Y_C$$

Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

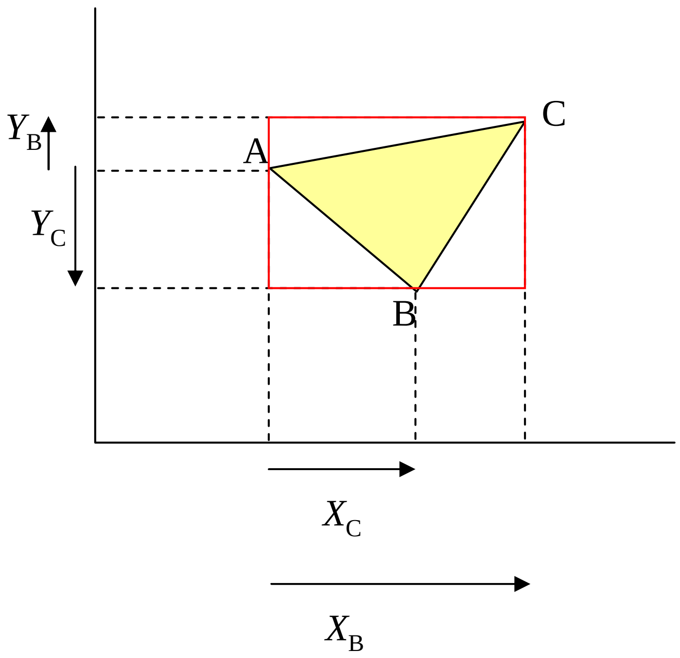
On double $\quad AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

Théorème de Pythagore

$$BC^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2$$
$$= X_B^2 + X_C^2 - 2\ X_B\ X_C + Y_B^2 + Y_C^2 - 2\ Y_B\ Y_C$$

$$AC^2 = X_B^2 + Y_B^2$$

Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

On double $\quad AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

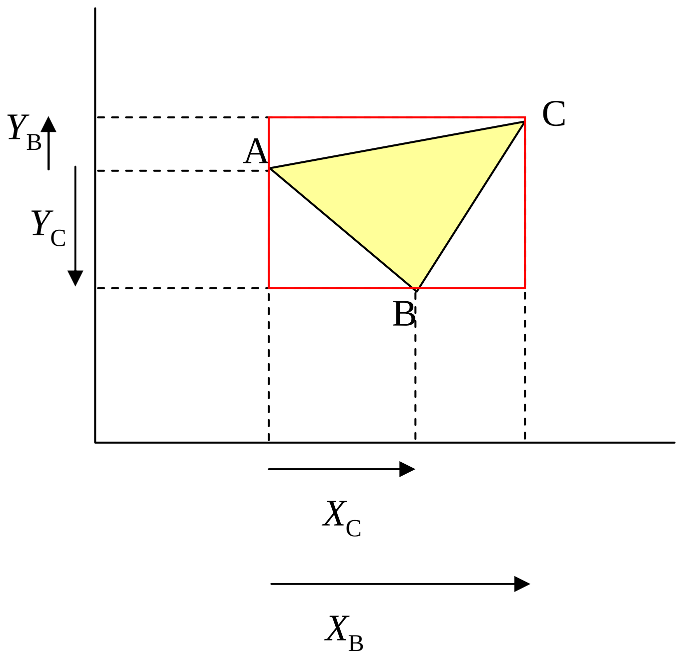
Théorème de Pythagore

$$BC^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2$$
$$= X_B^2 + X_C^2 - 2\ X_B\ X_C + Y_B^2 + Y_C^2 - 2\ Y_B\ Y_C$$

$$AC^2 = X_B^2 + Y_B^2$$

$$AB^2 = X_C^2 + Y_C^2$$

Produit scalaire en 2D



Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

On double $\quad AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

Théorème de Pythagore

$$BC^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2$$
$$= X_B{}^2 + X_C{}^2 - 2\ X_B\ X_C + Y_B{}^2 + Y_C{}^2 - 2\ Y_B\ Y_C$$

$$AC^2 = X_B{}^2 + Y_B{}^2$$

$$AB^2 = X_C{}^2 + Y_C{}^2$$

Calcul : $2\ X_B\ X_C + 2\ Y_B\ Y_C = 2\ \mathbf{AB\ AC}$

Calcul : $X_B\ X_C + Y_B\ Y_C = \mathbf{AB\ AC}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est (encore) la somme des multiplications des composantes homologues.

Produit scalaire en 3D

Théorème de Pythagore

$BC^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2 + (Z_B - Z_C)^2$
$= X_B^2 + X_C^2 - 2\, X_B\, X_C + Y_B^2 + Y_C^2 - 2\, Y_B\, Y_C + Z_B^2 + Z_C^2 - 2\, Z_B\, Z_C$

$AC^2 = X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2$

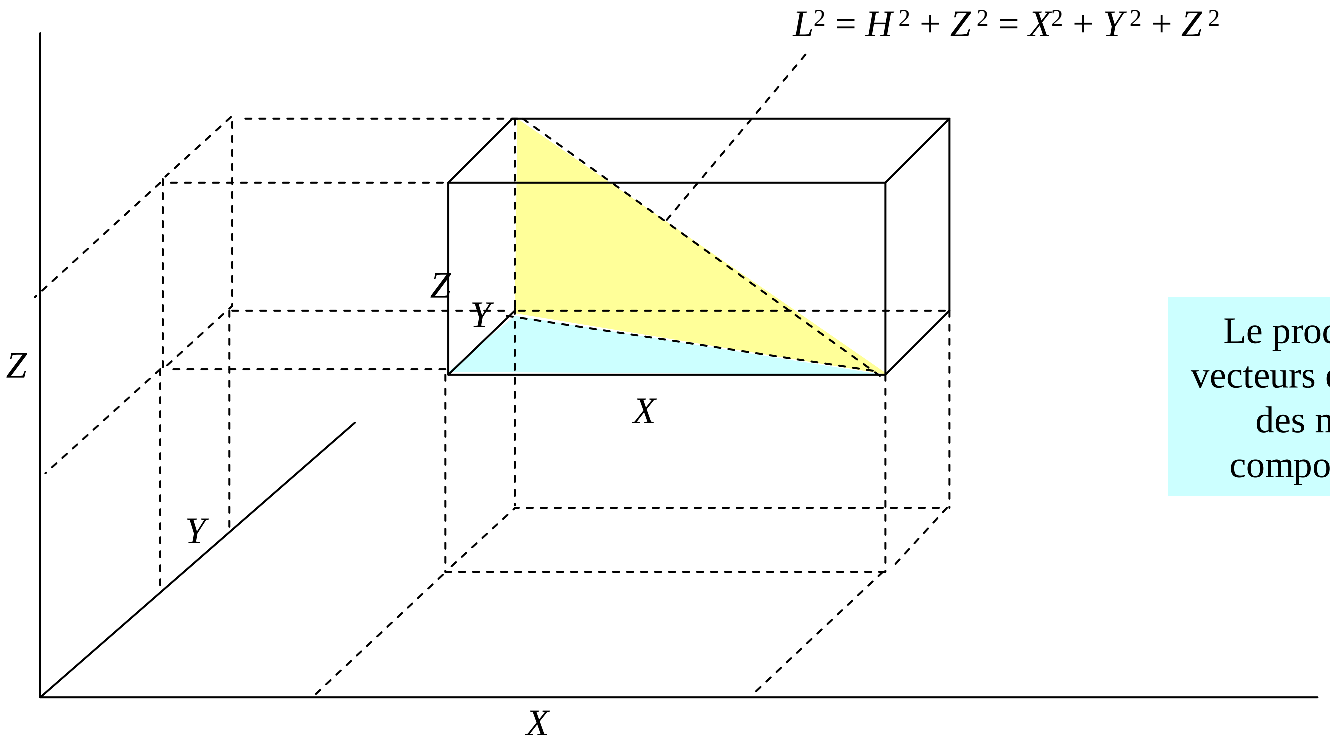
$AB^2 = X_C^2 + Y_C^2 + Z_B^2$

Calcul : $X_B\, X_C + Y_B\, Y_C + Y_B\, Y_C =$ **AB AC**

Théorème du cosinus (image XX)

$$\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2} = \mathbf{AB\ AC}$$

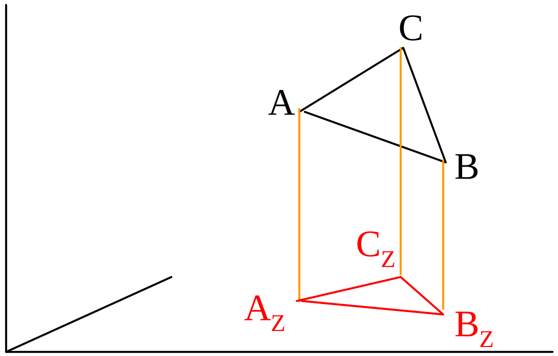
On double $AB^2 - AC^2 - AB^2 = 2\,\mathbf{AB\ AC}$



Le produit scalaire de deux vecteurs est (encore) la somme des multiplications des composantes homologues.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D

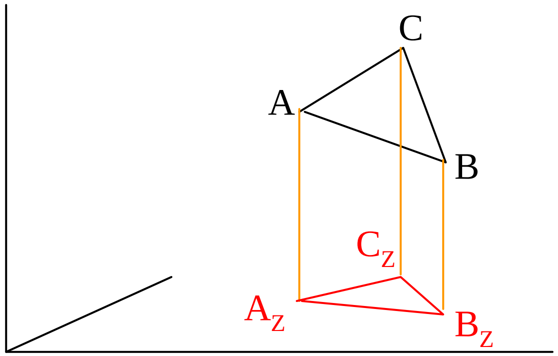


Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

$\mathbf{S}^{\,2} = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D

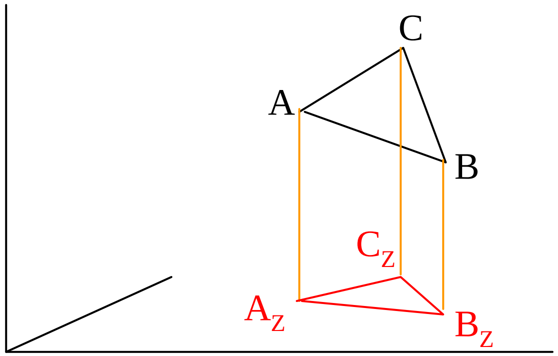


Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



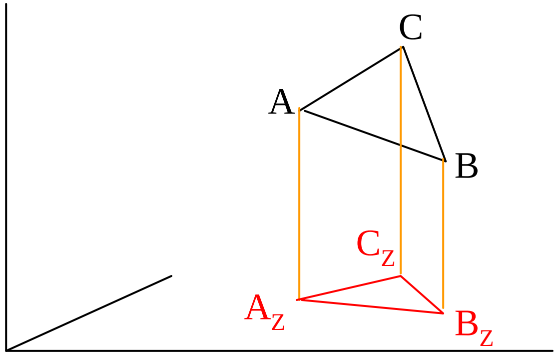
Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

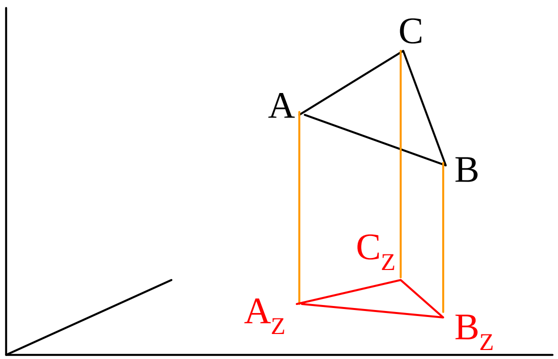
Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si **AB** = $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et **AC** = $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

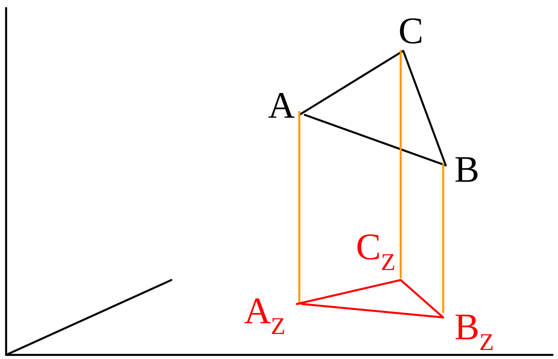
Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Le calcul de :$\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2\,AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

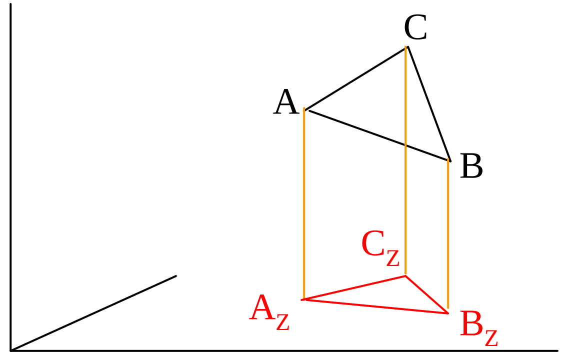
Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Le calcul de :$\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2\,AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

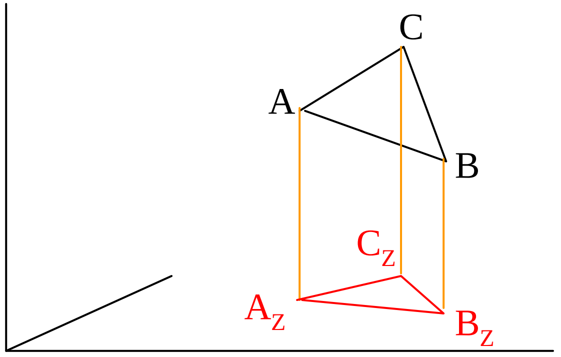
$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Le calcul de : $\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2\,AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

Comme $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ donne 1, on déduit que $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du sinus de l'angle BAC.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

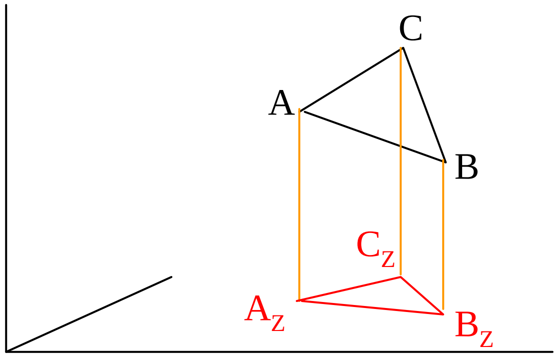
Le calcul de : $\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2\,AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

Comme $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ donne 1, on déduit que $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du sinus de l'angle BAC.

$\mathbf{S}^2 = (AB\,AC \sin \text{BAC})^2 = (\text{aire ABC})^2$.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix}$ alors Aire $(\mathrm{ABC})_Z = X\,Y' - Y\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (\mathrm{ABC})_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (\mathrm{ABC})_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (\mathrm{ABC})_X \\ \text{aire } (\mathrm{ABC})_Y \\ \text{aire } (\mathrm{ABC})_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Y' - Y\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Le calcul de : $\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2\,AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

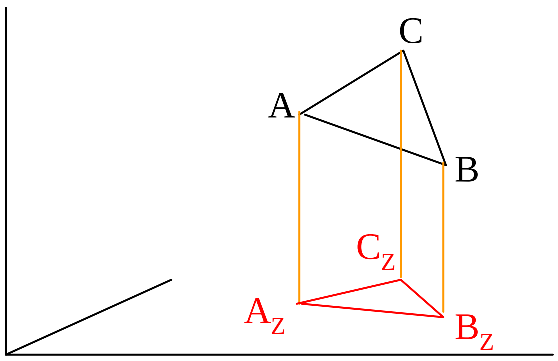
Comme $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2\,AC^2$ donne 1, on déduit que $\mathbf{S}^2 / AB^2\,AC^2$ est le carré du sinus de l'angle BAC.

$\mathbf{S}^2 = (AB\,AC \sin \mathrm{BAC})^2 = (\text{aire ABC})^2$.

En conséquence, la longueur des flèches de **S** est bien l'aire du triangle ABC.

Aires en 3D

La projection d'un triangle sur un plan est un triangle dont ont sait calculer l'aire en 2D



Si $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ alors Aire $(ABC)_X = X\,Z' - Z\,X'$

Par analogie $\begin{cases} \text{Aire } (ABC)_X = Y\,Z' - Z\,Y' \\ \text{Aire } (ABC)_Z = X\,Y' - Y\,X' \end{cases}$

Hypothèse : la longueur des flèches du vecteur **S** de composantes $\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix}$ est l'aire du triangle ABC.

$\mathbf{S}^2 = (X\,Z' - Z\,X')^2 + (Y\,Z' - Z\,Y')^2 + (X\,Y' - Y\,X')^2$ et $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 = (X\,X' + Y\,Y' + Z\,Z')^2$.

Le calcul de : $\mathbf{S}^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2$ donne $AB^2 AC^2$. $(\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2 AC^2$ est le carré du cosinus de l'angle BAC.

Comme $\mathbf{S}^2 / AB^2 AC^2 + (\mathbf{AB}\ \mathbf{AC})^2 / AB^2 AC^2$ donne 1, on déduit que $\mathbf{S}^2 / AB^2 AC^2$ est le carré du sinus de l'angle BAC.

$\mathbf{S}^2 = (AB\ AC \sin \mathrm{BAC})^2 = (\text{aire ABC})^2$.

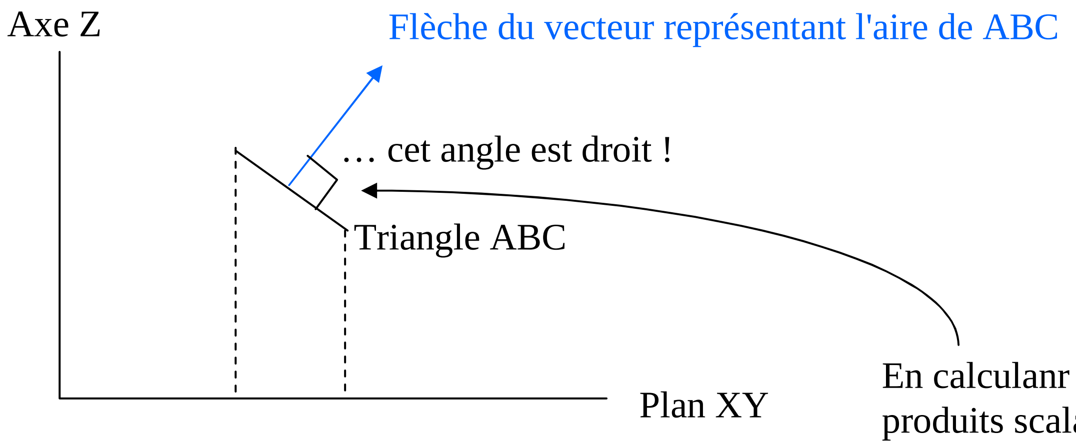
En conséquence, la longueur des flèches de **S** est bien l'aire du triangle ABC.

On définit l'aire de ABC par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{aire } (ABC)_X \\ \text{aire } (ABC)_Y \\ \text{aire } (ABC)_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Aires en 3D

Regardons la surface d'aire **S** par la tranche



En calculanr les produits scalaires **S** · **AB** et **S** · **AC**, on trouve zéro, ce qui démontre que …

On définit l'aire de ABC par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{aire (ABC)}_X \\ \text{aire (ABC)}_Y \\ \text{aire (ABC)}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} Y & Y' \\ Z & Z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$