1. **Enseigner le calcul différentiel dès la classe de troisième ?**

C'est possible !
Parce que les élèves savent admirer les jolis coups intellectuels aussi fort que les exploits de leurs sportifs favoris. Parce que tous les élèves ont un potentiel personnel de raisonnement aussi bon que le nôtre.
Parce que les notions de géométrie et d'algèbre nécessaires sont du niveau de la troisième.

2. **La seule originalité qu'on leur demande d'assimiler est d'accepter un nouveau code d'écriture algébrique** consistant en un mot de deux lettres dont la première est un "d" (parce qu'elle est l'initiale du mot "différence") qui désigne une unique grandeur.

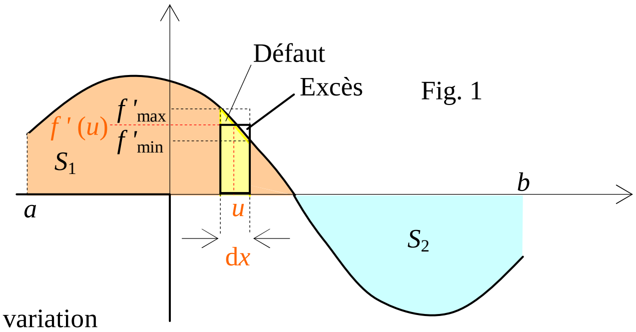


Fig. 1

3. **Pédagogie de l'histogramme**

Regardez bien cette figure. Elle vous dit tout !
L'aire de la surface limitée par la courbe noire, l'axe des abscisses et deux parallèles à l'axe des ordonnées d'abscisses *a* et *u* représente une fonction *f*.
La courbe noire représente une autre fonction *f '*.
L'aire de la surface jaune (appelons-la *lame*) est la variation exacte de *f* entre deux abscisses écartées d'une quantité d*x*.
On l'appelle d*f*.
Si la position de *u* est bien choisie, l'aire du rectangle noir (appelons-le *colonne*) est exactement égale à celle de la lame.

Conclusion : $\mathrm{d}f = f'(u)\,\mathrm{d}x$. C'est la formule de Leibniz. Une algèbre donne $f'(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

4. **Aires algébriques**

Les aires des surfaces au-dessus de l'axe des abscisses (orange et jaune) sont comptées algébriquement positivement, et en dessous négativement.

5. **Maintenant testez l'imagination des élèves**.

Imaginez le découpage de la surface représentant *f*(*u*) en lames de largeurs variées et pour chacune l'identification de la position jouant le rôle de *u*.
Demandez-leur de dessiner la figure avec les lames de leur choix.
La somme des aires analogues à d*f* est EXACTEMENT l'aire *f*(*u*). Leibniz proposé de la coder par la lettre "S" allongée verticalement placée devant d*f* donc devant $f'(u)\,\mathrm{d}x$: $f(u) = \int f'(u)\,\mathrm{d}x$. Dans ce calcul, rien n'est perdu (et rien en trop), d'où le nom de *calcul intégral*.

6. **À quoi ça peut servir ?**

En cinématique gérer par la géométrie les mouvements à vitesses variables ou les travaux de force variables.
Interpréter un spectre sachant que tous sont des histogrammes.
Démontrer d'une manière rapide et simple les lois importantes de la physique.
Oui, on peut le faire sans passer par les démonstrations "êta upsilon" hors de portée en collège ou en lycée et si difficiles pour une majorité d'élèves de terminale.
Le seul obstacle qui reste pour nous et les collègues de mathématiques est de démontrer des formules de dérivées qui ne peuvent se faire que par passage à la limite.

Notion de limite sans "êta – upsilon"

7. Qui m'a inspiré ?

C'est un ingénieur en retraite qui m'a offert ce procédé d'initiation à la notion de limite. Combinée avec un texte de Laurent Schwartz – voir https://www.amazon.fr/M%C3%A9thodes-math%C3%A9matiques-pour-sciences-physiques/dp/2705652132 - malheureusement difficile à trouver dans le commerce, page 11 et suivantes cela donne une pédagogie très confortable.

Quelques notions ensemblistes très utiles

8. Couple

Les enfants en collège apprennent facilement les notions de singleton et de paire et savent très bien que les écritures $\{a , b\}$ et $\{b , a\}$ désignent le même ensemble. Alors testez-les avec cette question : *sachant que les éléments a et b sont distincts, les ensembles* $\{\{a , b\} , \{a\}\}$ et $\{\{b , a\} , \{b\}\}$ *sont-ils distincts ou confondus ?* Personnellement je n'ai eu aucune réponse erronée. J'en ai profité pour leur dire que ces ensembles sont appelés *couples mathématiques* ou simplement *couples* et qu'ils sont d'un usage très courant. Viennent ensuite les écritures plus légères et commodes (a , b) et (b , a) et les expressions "antécédent" et "image".Puis deux notions cauchemardesques pour nombre de collégiens ou de lycéens : les suites et les fonctions.

9. Fonction

Une fonction est un ensemble de couples dans lequel chaque antécédent n'a qu'une seule image.
C'est là que tombe la remarque spontanée qui fait toujours plaisir à un enseignant : " *c'est simple !* ", quelque fois suivie de la question critique "*mais pourquoi on ne nous dit pas ça à l'école ?* ".
La notion d'ensemble de définition va de soi tout comme l'image ou l'antécédent d'un ensemble.

10. Suites

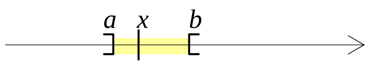
De même une suite est une fonction dont l'ensemble des antécédents est celui des nombres entiers naturels, le $\mathbb{N}$. Mais là un obstacle psychologique est inévitable : des élèves constatent que les extraits d'une suite n'ont plus comme ensemble de définition le $\mathbb{N}$, mais seulement une partie !

11. Limite(s)

Du livre de Laurent Schwartz j'ai tiré une idée : remplacer dans la définition $\mathbb{N}$ par n'importe quel ensemble *dénombrable infini* dont les éléments sont nommés *indices*, en rappelant le sens des mots *dénombrable* qui veut dire qu'il est possible de numéroter chaque élément et *infini* signifiant qu'il n'existe pas de dernier numéro. Cette idée élimine l'obstacle psychologique des extractions de suites. On peut dire qu'une suite u est un ensemble de couples (i , u_i) dans lequel chaque antécédent i n'a qu'une image u_i.
Le mot "terme" est courant dans notre langage : il désigne simplement un couple de la suite. Pour alléger les phrases qui suivent ce mot "terme" aura selon le contexte un des deux sens : soit le couple, soit son image. Par exemple la phrase correcte "les images de ces termes sont dans cet ensemble" sera allégée en "ces termes sont dans cet ensemble".

12. Intervalles

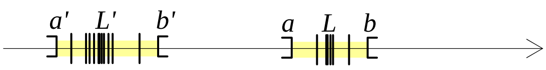
On a par définition équivalence logique entre $x \in \,]a , b[$ et $a < x < b$.



Limites d'une suite

13. Multiplicité

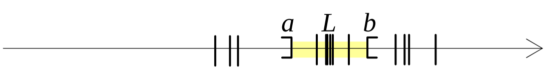
L'ingénieur est un passionné de topologie. Pour une suite donnée, UNE limite est vue comme un nombre L tel que tout intervalle ouvert contenant L contient une infinité de ses termes.



Cette définition permet que la suite possède plusieurs limites comme le montre la figure, et même une infinité dénombrable.

14. Unicité

Pour l'unicité de la limite, il faut compléter la définition par "et que seulement une quantité finie en dehors".



Sachant qu'une quantité finie signifie que si on les numérote il y a un dernier numéro. On parle alors de LA limite d'une suite.

Dans cette définition le "quelque soit upsilon il existe …" est sous-entendu : en effet rien n'est dit sur la longueur de l'intervalle ouvert. De même le "… N tel que …" est signalé par le nombre fini de termes.

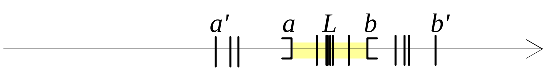
Une autre expression de l'idée est ceci.

L est la limite de la suite u si tout intervalle ouvert contenant L contient tous ses termes sauf une quantité finie d'entre eux.

Si une infinité de termes est hors d'au moins un intervalle contenant L alors L n'est pas la limite de la suite.

15. Encadrement

Soit une suite ayant une limite unique. Ses termes sont tous dans un certain intervalle ouvert.



Preuve. Si L est la limite de u alors pour un intervalle ouvert donne $]a\ ,\ b[$ un nombre fini seulement de termes sont hors de lui. Soient les deux nombres a' = min (a et ces termes) et b' = max (b et ces mêmes termes) : alors l'intervalle fermé $[a'\ ,\ b'\ ]$ contient toutes les termes ■

16. **Extraction**

Si à une suite on enlève un nombre fini de termes la nouvelle suite a la même limite.
Preuve. Soit u une suite de limite L. Soit u' la nouvelle suite obtenue en enlevant un nombre fini de termes de u. Tout intervalle ouvert possédant L exclut un nombre fini de termes de u' et parmi eux un nombre fini de termes de u' ■

17. **Signe**

Si la limite n'est pas nulle, il existe un intervalle ouvert dans lequel tous les termes sauf une quantité finie d'entre eux sont de même signe que la limite.
Preuve. Raisonnons sur une limite strictement positive L. Soit a tel que $0 < a < L$. Soit b strictement plus grand que L. Seulement une quantité finie de ces termes sont hors de $]a\ ,\ b[$ donc tous les autres sont dedans donc sont strictement positifs.
Un raisonnement analogue existe si L est strictement négative ■
Note : en conséquence, si la limite est non nulle ou peut toujours extraire de la suite tous les termes nuls puisque ces derniers sont en nombre fini.

18. **Suite opposée**.

Si une suite u a sa limite L alors la suite $-u$ définie comme l'ensemble des couples $(n\ ,\ -u_n)$ a comme limite $-L$.
Preuve. Si $x \in\ ]a\ ,\ b[$ alors $a < x < b$ donc par retournement des inégalités $-b < -x < -a$ donc $-x$ appartient à $]-b\ ,\ -a\ [$. En particulier si L est dans $]a\ ,\ b[$ alors $-L$ est dans $]-b, -a\ [$. Si $-L$ n'était pas la limite de $-u$ alors les termes de $-u$ seraient hors de $]-b, -a\ [$ donc une infinité de termes de u seraient hors de $]a\ ,\ b[$, donc l'hypothèse est fausse ■

19. **Multiplication par un nombre**

Si une suite u a sa limite L alors quelque soit le nombre k la suite $k\ u$ définie comme l'ensemble des couples $(n\ ,\ k\ u_n)$ a comme limite $k\ L$.
Preuve.
Si $k > 0$ et $x \in\ ]a\ ,\ b[$ alors $a < x < b$ donc $k\ a < k\ x < k\ b$ donc x est dans l'intervalle $]k\ a\ ,\ k\ b[$.
Si $k\ L$ n'était pas la limite de $k\ u$, il faudrait que pour au moins un intervalle ouvert comme $]k\ a\ ,\ k\ b\ [$ contenant $k\ L$ une infinité de termes de $k\ u$ soient en dehors, donc qu'une infinité de termes de u soient hors $]a\ ,\ b[$ contenant L, ce qui est impossible par définition de la limites L. L'hypothèse est donc fausse.
Si $k < 0$ alors $-k > 0$ donc $-k\ u$ a la limite $-L$ donc par opposition $k\ u$ a la limite L ■
Si $k = 0$ tous les u_n sont nuls et tout intervalle contenant 0 contient tous les $k\ u_n$ et zéro $k\ u_n$ est en dehors ■

20. **Somme de suites**

Soient u et v deux suites dont les ensembles d'indices sont confondus, la première de limite L et l'autre de limite M. Alors $u + v$ définie comme l'ensemble des couples $(n\ ,\ u_n + v_n)$ a la limite $L + M$.
Preuve. Si $x \in\ ]a\ ,\ b[$ et $y \in\ ]c\ ,\ d\ [$ alors par définition des intervalles $a < x < b$ et $c < y < d$, donc par addition membre à membre des inégalités $a + c < x + y < b + d$ donc par définition des intervalles $x + y$ appartient à $]a + c\ ,\ b + d\ [$.
En conséquence si $x + y$ est hors de $]a + c\ ,\ b + d\ [$ il faut soit que x soit hors de $]a\ ,\ b[$ soit que y soit hors de $]c\ ,\ d\ [$.
Retour à la limite : si $L + M$ n'était pas la limite de $u + v$, il faudrait que pour au moins un intervalle ouvert comme $]a + c\ ,\ b + d\ [$ contenant $L + M$ une infinité de termes de $u + v$ soient en dehors, donc qu'une infinité de termes de u ou de v soient hors respectivement hors de $]a\ ,\ b[$ contenant L et $]c\ ,\ d\ [$ contenant M, ce qui est impossible par définition des limites L et M. L'hypothèse est donc fausse ■

21. **Multiplication de suites**

Soient u et v deux suites dont les ensembles d'indices sont confondus, la première de limite L et l'autre de limite M. Alors $u\ v$ définie comme l'ensemble des couples $(n\ ,\ u_n\ v_n)$ a la limite $L\ M$.
Preuve. Elle est compliquée par la règle des signes de la multiplication.
Pour une suite en général, on retire la minorité finie des termes qui n'ont pas le même signe que la limite, puis on raisonne sur les suites restantes qu'on appellera encore u et v.
Pour commencer, on raisonne sur des suites restantes dont tous les images des termes sont strictement positifs. Soient deux intervalles ouverts $]a\ ,\ b[$ et $]c\ ,\ d\ [$. On a $a < b$ et $c < d$. Une multiplication par c donne $a\ c < b\ c$ et une par b donne $b\ c < b\ d$ et la transitivité donne $a\ c < b\ d$. On peut donc multiplier membre à membre deux inégalités strictes chez les nombres strictemment positifs. La répétition du raisonnement précédent est possible et donne le résultat analogue : Si $x \in\ ]a\ ,\ b[$ et $y \in\ ]c\ ,\ d\ [$ alors $x\ y$ appartient à $]a\ c\ ,\ b\ d\ [$.
La démonstration se termine comme pour l'addition.

Si les deux limites ne sont pas du même signe, on remplace u ou v par leur opposée, ce qui revient au cas précédent. On montre alors que la limite de la multiplication $(-u)\ v$ ou de $u\ (-\ v)$ est $(-\ L\ )\ M$ donc que la multiplication $u\ v$ a la limite $L\ M$ et que a limite de la multiplication $(-u)\ (-\ v)$ est $(-\ L)\ (-\ M)$ soit $L\ M$ ■

22. **Quotients de suites**.

Soient u et v deux suites dont les ensembles d'indices sont confondus, la première de limite L et l'autre de limite M non nulle. Alors $u\ /\ v$ définie comme l'ensemble des couples (n si $v_n \neq 0$, $u_n\ /\ v_n$) a la limite $L\ /\ M$.

Preuve. De v on extrait le nombre fini de termes nuls, ce qui ne change pas sa limite. De u on extrait les termes de même indice. Les nouvelles suites seront nommées u' et v'.

Parce qu'aucun terme de v' n'est nul alors $u'\ /\ v'$ est la multiplication de u' par $1\ /\ v'$ définie comme l'ensemble des couples $(n\ ,\ 1\ /\ v'_n)$. La limite est donc $L\ (1\ /\ M)$ soit $L\ /\ M$ ■

Continuité

23. **Que proposa l'ami ingénieur ?**

Une fonction g est continue sur l'abscisse u si 1° g possède un couple $\big(u\ ,\ f(u)\big)$ et 2° l'ensemble des antécédents des nombres d'un intervalle ouvert possédant $g(u)$ est un intervalle ouvert. La figure 2 est très parlante (en rouge). Et ça marche même pour le sommet d'une bosse (en bleu).

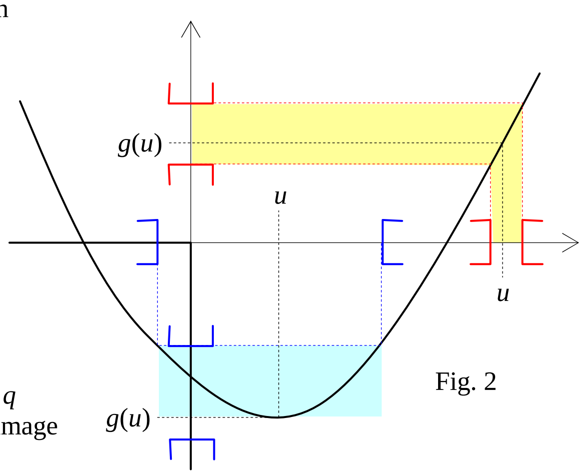


Fig. 2

24. **Application : démontrer quelques formules de dérivées**

Tout le monde connaît la formule du coefficient de variation $q(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Et tout le monde sait que cette fonction q définie comme l'ensemble des couples $\big(h\ ,\ f(h)\big)$ ne possède pas de couple d'antécédent zéro. Il y a un trou dans la raquette. La fonction q n'est pas continue en l'abscisse zéro. Dans ce cas, $f\ '\ (u)$ est l'image du couple ajoutée à q pour donner une nouvelle fonction q' continue quand $h = 0$.

Exemple : établir la formule de la dérivée de la fonction carrée $f(x) = x^2$. C'est l'ensemble des couples $(x\ ,\ x^2)$. Un calcul rapide donne $q(h) = \dfrac{2\ x\ h + h^2}{h}$ qui se simplifie presque partout en $q(h) = 2\ x + h$, c'est-à-dire partout sauf en h = zéro. C'est le trou dans la raquette. On définit une autre fonction h' comme la réunion de q et du singleton $\{(0\ ,\ 2\ x)\}$, c'est-à-dire ajouter le couple $(0\ ,\ 2\ x)$ à l'ensemble q des couples $\left(x\ ,\ \dfrac{2\ x\ h + h^2}{h}\right)$. Il est évident que la fonction q' obtenue est continue en $h = 0$.

25. Des raisonnement assez ressemblants avec ceux des alinéas 18 à 22 démontrent les propriétés utiles de cette nouvelle espèce de limites, celles de la continuité.

Je vous fais confiance pour les trouver.

Denis Chadebec