OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES EN OPTIQUE

Page 1 : les difficultés mathématiques liées à l’emploi de la fonction sinus.
Page 1 : la bizarrerie de l’existence de la droite «normale» qui ne correspond à aucune observation, mais qui fait partie de la «machinerie de modélisation» de la réfraction.
Page 2 : la modélisation du phénomène de dispersion (dépendance de l’indice de réfraction vis-à-vis de la distribution spectrale de la lumière incidente).
Page 3 : le lien entre ce que l’on voit (l’objet ou l’image macroscopique) et la modélisation par le rayon lumineux (qui fait le lien entre l’objet et l’image, pris point par point).
Page 3 : le phénomène double de réfraction et de réflexion qui oblige l’élève à accepter que l’énergie lumineuse incidente se répartisse de manière non équitable.
Page 4 : le lien entre réfraction et cheminement d’un rayon lumineux à travers une lentille mince.
Page 4 : les difficultés mathématiques liées à la forme de la relation de conjugaison par une lentille mince.
Pages 4 et 5 : les difficultés mathématiques liées à l’algébrisation

Difficultés mathématiques liées à l’emploi de la fonction sinus

Sur http://www.paysages-emotions.fr/wa_files/220509_20Syllabus_20math_C3_A9matiques.pdf, pages 17 pour le texte et 18 pour les figures, est présentée une "trigonométrie express" car, évidemment cette foutue fonction sinus avait paralysé nombre de mes élèves, en lycée professionnel puis en lycée général.

Mais même sans cela, l'expérience de la réfraction peut être exploitée sans même avoir besoin d'une calculette : voir
http://www.paysages-emotions.fr/wa_files/Exp_C3_A9rience_20sur_20la_20r_C3_A9fraction_20_282_29.pdf .

Vous vous demandez pourquoi s'encombrer d'une fonction sinus pour modéliser la réfraction ? Une représentation graphique de l'angle *i'* en fonction de l'angle *i* montre la non linéarité, donc la non proportionnalité.
Les graphiques les plus faciles à exploiter sont les segments de droite. Il faut donc choisir une fonction mathématique – si elle existe – capable de produire un segment de droite.
Pourquoi un sinus ?
Pourquoi pas un cosinus ou une tangente ?
Parce que seul le sinus a donné un segment de droite sur le graphique !

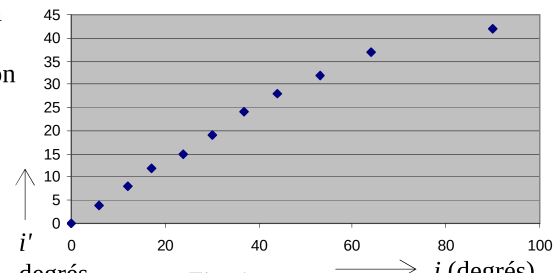


Fig. 1

Dans l'expérience classique, si sur la feuille de papier (figure 1) on trace au compas un cercle de rayon 100 mm, centré là où le rayon lumineux arrive sur la frontière entre les deux milieux de propagation, la frontière, la normale avec une équerre et un point par rayon pour ensuite les tracer une fois le dispositif optique enlevé, on obtient un faisceau de demi-droites ayant tous une extrémité au centre du cercle. Avec l'équerre on trace les segments opposés aux angles *i*, *i'* et *r*. On mesure leur longueur sachant qu'elles valent cent fois les sinus. Tant qu'on y est, on mesure les segments adjacents pour évaluer les cosinus.

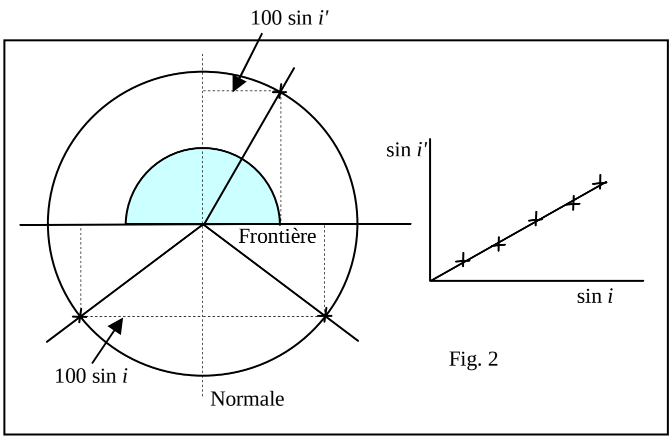


Fig. 2

La droite « normale » ne correspond à aucune observation

Figurez-vous que même l'illustre Johannes Kepler fut victime de ce syndrome ! Comme ce pirate de Descartes, il avait reçu par courrier non électronique (!) une lettre de Snell, et il eut cette très sympathique réaction : rejeter l'idée de la normale et de la trigonométrie en même temps car il pensait que la lumière n'est pas un être pensant à la manière d'Aristote … ou des Celtes (chez qui les "esprits" pouvaient habiter dans n'importe quel être vivant ou n'importe quelle chose), un être capable de calculer en pensée la future orientation de sa propagation après la traversée de la frontière entre les deux milieux transparents. Nous connaissons la suite : personne n'avait mentionne Snell dans nos manuels scolaires de l'ère de Jules ferry contrairement aux pays anglo-saxons.

La modélisation du phénomène de dispersion

Une fois résolue la question du sinus, on doit se souvenir que comme nos élèves, les savants pionniers de l'optique et tous ceux qui depuis dans une époque inconnue les avaient précédés étaient devant une énigme, et en tant que telle, il avaient mémorisé comme gravé sur du cuivre la dispersion.

Si vous en aviez le temps, le désaccord entre Newton et Huygens sur la nature de la lumière est vigoureusement formatrice. Le premier était partisan des "atomes de lumière" et le second des ondes progressives. En conséquence, le britannique pensait que la vitesse de propagation était plus grande dans le verre (figure 3) que dans l'air et le hollandais pensait le contraire (figure 4 à 6)).

Les enfants savent analyser et juger les modèles théoriques dès la fin du collège. On peut leur montrer deux logiques contradictoires. Et apprendre que même des grands des sciences peuvent être contredits est rassurant et réjouissant.

Pendant une unité de temps, la distance de propagation est sa vitesse *c* dans l'air et *c'* dans le verre.

La réflexion a immédiatement une explication géométrique (symétrie axiale).

Pour la réfraction, on voit que les sinus des trois angles sont égaux, mais pas leur cosinus.

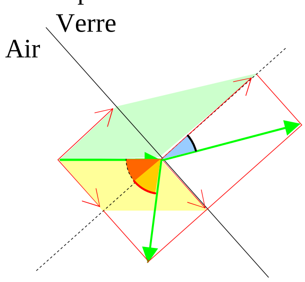


Fig. 3

Frontière entre les deux milieux
Normale
Vitesse de propagation de la lumière
Projections de cette vitesse
Conservation de la projection de cette vitesse sur la frontière
Augmentation de la projection de cette vitesse sur la normale
Angle d'incidence *i*
Angle de réflexion *r*
Angle de réfraction *i'*
Crête d'onde
Avance de phase
Retard de phase

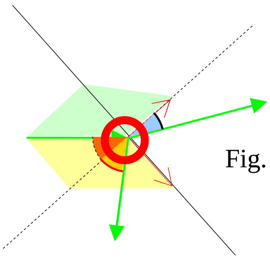


Fig. 4

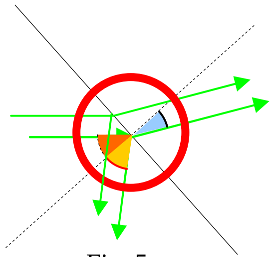


Fig. 5

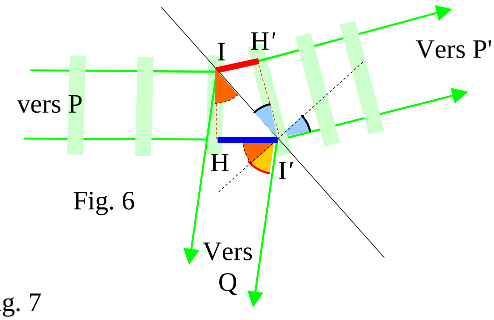
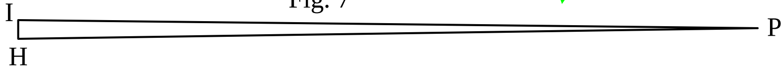


Fig. 6

Distance	Temps
IH ou *I'H'*	*t*
c ou *c'*	1

Fig. 7



Agrandissons sur les trois angles (cercles rouges fig. 5 et 6).

La fig. 5 avec l'angle *P* quasi nul justifie le quasi parallélisme des rayons de la fig. 4 : la somme des angles intérieurs d'un triangle est π : $H + I + P = \pi$. Si le triangle est en plus isocèle, $H = I$ donc $2H + P = \pi$ donc $H = I \approx \pi/2$. Les triangles IHI' et IH'I' sont rectangles respectivement en H et H'. Le fig. 4 montre ensuite les angles égaux pour cause de côtés homologues perpendiculaires. La trigonométrie donne enfin $HI' = AB \sin i$ et $H'I = AB \sin i'$.

Un autre obstacle est que des élèves se perdent dans les proportions entre distances de propagation et temps de retard, d'où le tableau de proportion ci-dessus.

À titre de comparaison, dresser le tableau à raison d'une colonne par angle des angles en degrés prouve la non proportion entre *i* et *i'* et l'égalité de *i* et *r*. C'est une occasion de plus de montrer que tout tableau de valeurs n'est pas une proportion.

Le retard de phase occasionné par IH' (trait rouge) et son avance I'H (trait bleu) sont égaux pour que le point lointain P' reçoivent simultanément une crête d'onde venue de I et l'autre venue de I' il faut que $\frac{IH'}{c} = \frac{HI'}{c'}$ donc que $\frac{II' \sin i}{c} = \frac{II' \sin i'}{c'}$ donc que $\frac{\sin i}{c} = \frac{\sin i'}{c'}$.

Comme l'expérimentation a prouvé que la plus grande vitesse de la lumière est dans le vide, alors les quotients $\frac{c_{\text{vide}}}{c} = n$ et $\frac{c_{\text{vide}}}{c'} = n'$ qu'on appelle indices de réfraction des milieux transparents sont toujours plus grands que 1.

Une multiplication par c_{vide} des deux membres de la proportion précédents donne la formule de Snell $n \sin i = n' \sin i'$. Sachant l'angle d'incidence, on a un moyen de prévoir l'angle de réfraction : $\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i$.

Lien entre ce que l'on voit et la modélisation par le rayon lumineux

Les mirages artificiels

Quand j'avais énoncé devant une classe que les instruments d'optique ont été conçus dans le but de tromper nos rétines et donc notre cerveau, nombre de regards étaient incrédules. C'est la preuve qu'en optique il faut toujours commencer par là. Par exemple un télescope nous donne un mirage ! C'est tellement vrai que Galilée a du batailler contre les sceptiques de son temps pour justifier l'emploi de sa lunette.

Par exemple, devant la cour de Florence et les hauts représentants du clergé et de la bourgeoisie il montra un télégraphe optique rudimentaire : en deux lieux distants d'une vingtaine de kilomètres, il posta un agent équipé de la lunette et d'une torche, un sur la terrasse du *Palazzio veicchio*, résidence des Medici et l'autre sur une hauteur hors de la ville. Puis il invita le public à échanger à distance des mots codés en mouvements de la torche observés à travers l'instrument.

Note hors sujet : Il en envoya un exemplaire à Cesare Cremonini (1550-1631), une célébrité philosophique italienne partisan de l'aristotélisme, avec le mode d'emploi. Celui-ci renvoya le colis sans le déballer à l'expéditeur avec ce commentaire étonnant : il craignait que les observations mettent à bas sa conception aristotélicienne du monde !

Nous, bébés avions pris conscience de notre corps et de tout ce qui l'environne selon le principe bien connu des neuroscientifiques : notre mémoire profonde est associative. La loi de Hebb (1950) postula que si deux neurones sont simultanément excitées leurs coefficients synaptiques augmentent symétriquement et que dans le cas contraire elles diminuent.

C'est comme ça que nous avions établi les coordinations dans notre cerveau entre ce qui vient du corps, les ordres donnés par le cerveau, par exemple la position des mains sur un objet, et ce qui vient de la vision de cet objet, la lumière se propageant EN LIGNE DROITE. Et nous, bébés avons subi au moins une fois la blague du miroir devant un singe. Mais contrairement au singe, nous avons été capable de contourner la difficulté et de prendre conscience que l'objet – nous – et l'image sont distincts et que l'image est virtuelle (impossible à recueillir sur un écran).

La différence entre ces animaux et nous est dans l'aire du cortex, le nombre de neurones et la durée de notre développement définie comme celle de l'enfance et de l'adolescence. S'est alors installé dans nos têtes le postulat inconscient que toutes les images nous parviennent avec une propagation rectiligne de la lumière.

Si, entre la source et nos yeux la lumière traverse divers milieux de propagation avec changements de direction, rien ne change sur les deux rétines et le cerveau voit une image en ligne droite devant notre paire d'yeux. Donc là où la source n'est pas.

Un mirage, c'est exactement ça.

L'atmosphère crée des mirages naturels, les fabricants d'optique des mirages artificiels.

Le phénomène double de réfraction et de réflexion »

Il est bon de faire remarquer que le problème précédent a deux solutions, au sens que la réfraction correspond aux deux milieux différents, la réflexion au même milieu. On a donc non pas deux phénomènes optiques simultanés, mais un seul modélisé par la même expression mathématique $\frac{\sin i}{c} = \frac{\sin i'}{c'}$ quand la lumière traverse et $\frac{\sin i}{c} = \frac{\sin r}{c}$ quand elle est réfléchie. La surface sur laquelle arrive la lumière devient une source secondaire, et toutes les sources primaires comme secondaires émettent simultanément dans toutes les directions, tant que les circonstances de propagation le permettent comme les obstacles ou les interférences, donc ici dans les deux milieux à la fois.

Parce ce fait et parce que l'énergie n'est pas évoquée l'explication de la réfraction et de la réflexion, rien ne s'oppose à son partage sur la frontière entre le rayon réfléchi et le rayon réfracté. On peut voir ça comme un cas particulier du postulat du rasoir d'Occam : si rien ne s'oppose au partage, il y aura partage.
Mais si on inverse le sens de propagation de la lumière, sachant qu'un sinus est toujours inférieur à 1, qu'une algèbre donne $\sin i = \frac{n'}{n} \sin i'$, que n' (le verre) est plus grand que n (l'air) on voit bien que pour un angle i' plus grand qu'un certain seuil i'_{max} défini par l'équation $1 = \frac{n'}{n} \sin i'_{max}$ l'existence du rayon réfracté dans l'air est impossible.

Lien entre réfraction et cheminement d'un rayon lumineux

Les lentilles et la réfraction

Entre la leçon sur la loi de Snell et l'initiation aux lentilles il y a le prisme (fig. 8). Et de jolies expériences de dispersion. À chaque traversée de surface on a une dispersion. La conséquence est que l'orientation du rayon lumineux est toujours étalée à chaque traversée. Une fois vue cette figure, aucune raison ne peut perturber une personne qui s'initie à l'optique.

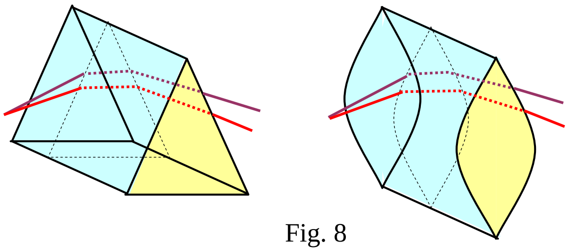


Fig. 8

Lentilles minces

Il reste l'adjectif qualificatif *mince*. Cette idéalisation en effet perturbe : les enfants se rendent bien compte que le changement de direction de propagation se fait toujours en deux lieux séparés par une distance non nulle, l'épaisseur de verre. L'idéalisation mérite un petit récit, un conte ou quelques anecdotes historiques.
Quand on choisit la forme d'une lentille convergente avant de commander sa fabrication, c'est dans quel but ? Que tous les rayons issu d'une source ponctuelle placée devant l'objet transparent se rassemblent sur un point unique de l'autre côté ou semblent sortir d'une source unique virtuelle située du même côté. Matériellement ce n'est jamais possible.
Quand Galilée acheta une longue vue à des marins hollandais, il comprit seulement une chose : à travers on voit une image située loin de l'objet et plus grande que lui. Mais déformée. Il attribua ce défaut optique à la forme des lentilles qu'il jugea imparfaite. Or en ce temps-là, la forme parfaite chez les savants et philosophes est sphérique. Il demanda donc à un verrier de faire des lentilles dont les deux surfaces sont des pièces (au sens mathématique) de sphère.
Nous connaissons le résultat : une nette amélioration de l'image.
Si Galilée avait postulé que tout phénomène physique pourra un jour être décrit dans le langage des mathématiques, il ne l'a pas fait en optique.

Plus tard, les opticiens firent entrer les mathématiques dans leur discipline. Les dessins familiers de construction des images représentent l'objectif idéal à atteindre pour pouvoir appliquer la géométrie de Thalès : épaisseur nulle au centre des lentilles et convergence ou divergence sur un point unique des rayons qui en sortent.

La figure 9 montre comment la symétrie explique le parallélisme des rayons entrant et sortant et passant par le centre de symétrie de la lentille. Si l'épaisseur est nulle, le rayon suit un segment de droite.

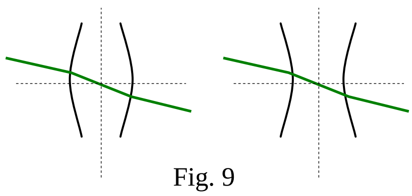


Fig. 9

Nous connaissons les expériences montrant les convergences et divergences avec des lentilles cylindriques et les impossibilités techniques de les obtenir. Par exemple voir la fig. 10.

Il faut se rappeler que les formules mathématiques de la physique ne sont que des modélisations conjugaison décrivent le but à atteindre en fabriquant les lentilles et non la réelle propagation des rayons.

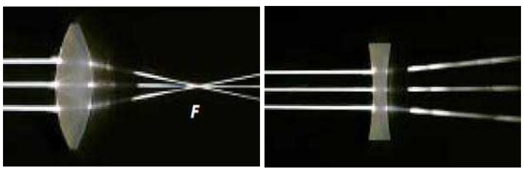


Fig. 10
http://pccollege.fr/quatrieme-2/la-lumiere-couleurs-et-images/chapitre-ii-les-lentilles/

Les difficultés mathématiques liées à la forme de la relation de conjugaison

On se sert de la loi mathématique de Thalès. Or justement cette loi est une proportion, donc une comparaison de quotients. Et des quotients sont appréciés parce que facile à interpréter : ceux dont le numérateur est 1.

Avant l'algébrisation, comme Descartes qui n'aimait pas les nombres négatifs, ne les utilisons pas : bien que le repère de l'espace ait son axe des ordonnées sur le symbole de la lentille.
On dresse deux tableaux de proportion, quitte à faire deux exemplaires de la figure.
Pour la lentille convergente (fig. 11 et 12) le quotient $\frac{h'}{h}$ est égal à la fois à $\frac{p'}{p}$ et à $\frac{p'-f'}{f'}$.

On a la relation de conjugaison $\frac{p'}{p} = \frac{p'-f'}{f'} = \frac{p'}{f'} - 1$.

une multiplication par $\frac{1}{p'}$ donne $\frac{1}{p} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{p'}$.

Pour la lentille divergente (fig. 13 et 14), on a intérêt à retourner le repère du plan.

Le quotient $\frac{h'}{h}$ est égal à la fois à $\frac{p'}{p}$ et à $\frac{f'}{p'-f'}$.

On a la relation de conjugaison $\frac{p'}{p} = \frac{f'-p'}{f'} = 1 - \frac{p'}{f'}$.

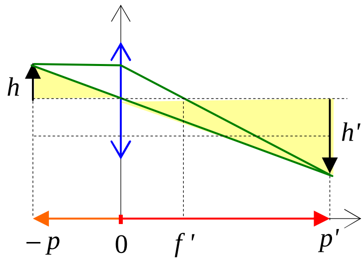
une multiplication par $\frac{1}{p'}$ donne $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{f'}$.

On constate simplement le retournement de la soustraction.
Dans les deux démonstrations les trois grandeurs p, p' et f' sont algébriquement positives. Pour ne pas se tromper sur le sens des soustractions, on regarde sur les figures qu'en convergence $p' > f'$ et en divergence $p' < f'$ donc que respectivement $\frac{1}{p'} < \frac{1}{f'}$ et $\frac{1}{p'} > \frac{1}{f'}$ alors que $\frac{1}{p}$ est positif dans les deux cas.
Dans les deux cas, le rapport des dimensions de l'objet et de l'image est le même : $\frac{h}{h'} = \frac{p}{p'}$.

Vert^t	Horiz^t
h	p
h'	p'

Centre optique

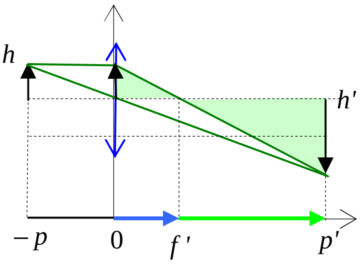
Tab 1, fig. 11



Vert^t	Horiz^t
h	f
h'	$p'-f'$

Foyer image

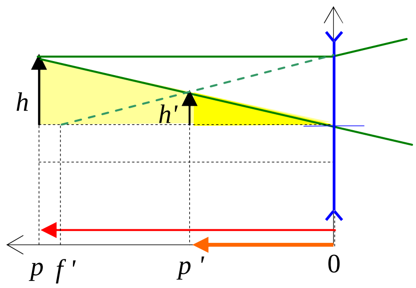
Tab 2, fig. 12



Vert^t	Horiz^t
h	p
h'	p'

Centre optique

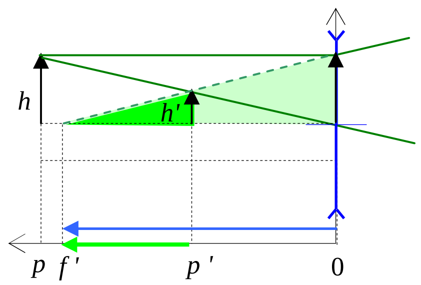
Tab 3, fig. 13



Vert^t	Horiz^t
h	f'
h'	$f'-p'$

Foyer image

Tab 4, fig. 14



Les difficultés mathématiques liées à l'algébrisation

Pour l'algébrisation, en divergence remettons le repère dans l'ancien sens. En respectant le sens des flèches des figures on devine la signature algébrique des grandeurs.

On trouve en convergence $-\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{\overline{f'}} - \frac{1}{\overline{p'}}$ et en divergence $-\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{\overline{f'}} - \frac{1}{\overline{p'}}$, c'est-à-dire exactement la même formule $\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{\overline{p'}} - \frac{1}{\overline{f'}}$.

Le même procédé donne par contre $\frac{\overline{h}}{\overline{h'}} = -\frac{\overline{p}}{\overline{p'}}$ (l'image est inversée) en convergence et $\frac{\overline{h}}{\overline{h'}} = \frac{\overline{p}}{\overline{p'}}$ en divergence (l'image n'est pas inversée).