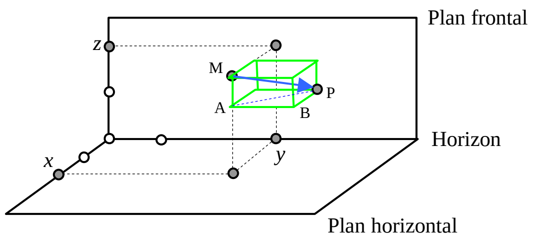
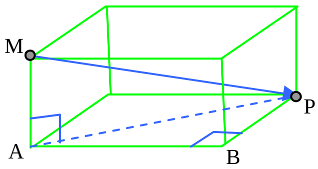
§ Cinématique en trois dimensions

Le moyen âge nous apporta non seulement les racines intellectuelles de l'invention du calcul différentiel, mais aussi la décomposition d'un mouvement dans l'espace et trois mouvements rectilignes simultanés par une extension de la technique des épures en architecture.

Visite dans la géométrie descriptive





Une flèche comme (MP) a trois coordonnées $x - x_o$, $y - y_o$ et $z - z_o$ (non représentées).
Le théorème de PYTHAGORE s'applique aux triangles rectangles AMP et
ABP : $MP^2 = AM^2 + AP^2$ avec $AP^2 = AB^2 + BP^2$ ce qui donne
$MP^2 = AM^2 + AB^2 + BP^2$ d'où par identification des coiordonnées
$MP^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2$.
Si la flèche représente un trajet pendant un temps t alors
$\dfrac{MP^2}{t^2} = \dfrac{(x - x_o)^2}{t^2} + \dfrac{(y - y_o)^2}{t^2} + \dfrac{(z - z_o)^2}{t^2}$.

A gauche on reconnait le carré de $V = \dfrac{MP}{t}$ qui est la vitesse du mouvement. A droite on reconnaît les carrés des trois projections de la dite vitesse sur les axes. On conclut $V^2 = V^{x\,2} + V^{y\,2} + V^{z\,2}$.

Note typographique : un défaut de typographie invite à écrire en position exposant les indices x, y et z des coordonnées. En effet, l'ordonnée de la vitesse s'écrirait V_y ce qui est peu lisible. C'est le contexte de l'écriture des formules qui permet au lecteur de ne pas confondre cet "indice en haut" et un exposant.

Mouvements uniformes
Il suffit de recopier trois fois la formule $x - x_o = V\,t$ en l'adaptant à chacune des coordonnées
$x - x_o = V^x\,t$, $y - y_o = V^y\,t$ et $z - z_o = V^z\,t$.
Par définition, le point M de coordonnées x, y et z est la **position**, le vecteur **r** de coordonnées x , y et z est le **vecteur position**, le point M_o de coordonnées x, y et z est la **position initiale** le vecteur $\mathbf{r}_o$ de coordonnées x_o , y_o et z_o est le **vecteur position initiale**, et le vecteur **V** de coordonnées V^x, V^y et V^z est le **vecteur vitesse**.
Compte tenu de la définition des opérations mathématiques sur les vecteurs les trois formules précédentes se résument par l'unique expression $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o = \mathbf{V}\,t$.

Mouvements uniformément variés
On a par analogie $x - x_o = \dfrac{1}{2}a^x\,t^2 + v_o^x\,t$, $y - y_o = \dfrac{1}{2}a^y\,t^2 + v_o^y\,t$ et $z - z_o = \dfrac{1}{2}a^z\,t^2 + v_o^z\,t$.
Par définition, le vecteur **a** de coordonnées a^x , a^y et a^z est le **vecteur accélération**. Le vecteur $\mathbf{v}_o$ de coordonnées
v_o^x , v_o^y et v_o^z est le **vecteur vitesse initiale**.
Compte tenu de la définition des opérations mathématiques sur les vecteurs les trois formules précédentes se résument par l'unique expression $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2 + \mathbf{v}_o\,t$.