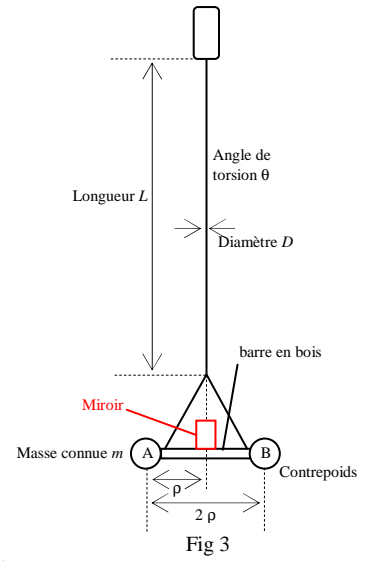
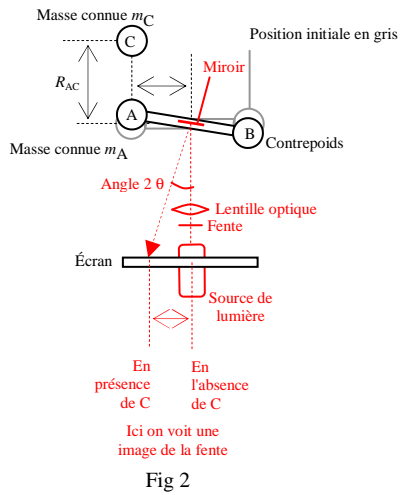
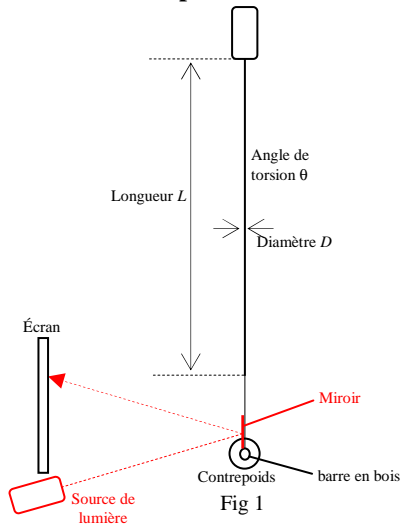


§ La mesure de G par CAVENDISH : choix techniques



Les figures 1 à 3 montrent la conception de l'expérience. Avant sa réalisation, il a fallu estimer l'ordre de grandeur de la force d'attraction entre les boules de plomb A et M pour ensuite choisir les matériaux et les dimensions.

§ La mesure de G par CAVENDISH : choix techniques

Ordre de grandeur

La force entre un objet sphérique et la Terre est donnée par la loi d'attraction universelle F

$$= G \frac{mM}{R^2} \text{ en sachant que si } R \text{ est égal au rayon terrestre alors } F \text{ est le poids des corps } F =$$

$$m g \text{ avec } g = 9,81 \text{ m s}^{-2}. \text{ Alors } G \text{ est solution de l'équation } m g = G \frac{mM}{R^2} \text{ donc après}$$

$$\text{multiplication par } R^2 \text{ et division par } M \text{ on a } \frac{g R^2}{M} = G.$$

Pour estimer grossièrement G il faut estimer M , la masse de la terre alors inconnue.

Hypothèse : la densité moyenne de la Terre est proche de celle des roches les plus abondantes, estimée alors à $\mu = 5480 \text{ kg m}^{-3}$. Le rayon terrestre a été mesuré dès l'époque d'ERATOSTHÈNE et estimé à 6371 km .

$$\text{La formule du volume de la sphère terrestre est } V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ donc la masse est (table 1) estimée à } M = \frac{4}{3} \pi \mu R^3$$

$$\text{donc } \frac{1}{M} = \frac{3}{4 \pi \mu R^3}. \text{ Entré dans le calcul de } G \text{ on trouve } G = \frac{3 g R^2}{4 \pi \mu R^3} = \frac{3 g}{4 \pi \mu R}.$$
 Numériquement

$$G = \frac{3 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}}{4 \cdot 3,14 \cdot 5480 \text{ kg m}^{-3} \cdot 6371000 \text{ m}} = 6,71 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

$$\text{Avec une telle valeur la force à mesurer est } F_{\text{mesuré}} = G \frac{m_A m_C}{R_{AC}^2} = 6,71 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \frac{0,778 \text{ kg} \cdot 50 \text{ kg}}{(0,1 \text{ m})^2}$$

soit $4,06 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

Choix technique

La seule technique capable de mesurer une force aussi faible est le pendule de torsion inventé par HOOKE. Pour faire tourner d'un angle θ en tordant un fil de diamètre D et de longueur L , si la distance entre les sphères A et B est égale à 2ρ , il faut un moment de force $F \rho$ égal à $C \theta$ avec $C = \frac{k D^4 \theta}{L}$ où k est une constante mesurée par

HOOKE pour toutes sortes de fils et barres de matériaux divers.

Unités : si u est l'unité de k alors $\text{N m} = u \text{ m}^4 \text{ m}^{-1}$ donc $\text{N} = u \text{ m}^3 \text{ m}^{-1} = u \text{ m}^2$ donc C est en N m^{-2} .

Exemple de choix de fil : pour un fil cylindrique en acier on trouve (ref 1) dans une table $k = 8 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$.

Pour un fil d'un mètre de long, obtenir un angle de torsion de 10 degrés, soit (tableau 1) de $\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10}{360} =$

environ 0,17 radian, il faudrait un fil de diamètre D solution de l'équation $F \rho$ égal à $\frac{k D^4 \theta}{L}$

$$D = \sqrt[4]{\frac{F \rho L}{k \theta}} = \sqrt[4]{\frac{4,06 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2} \cdot 0,17 \text{ rd}}} = 0,00004 \text{ m}, \text{ ce qui fait } 0,4 \text{ mm}.$$

De tels fils étaient disponibles à cette époque depuis l'invention en Allemagne d'un acier nouveau au XVIe siècle, l'acier à ressort dit "corde à piano".

Mesure de C avec précision : on le fait en faisant osciller le pendule isolé de toute masse importante dans le

voisinage. Sa loi angulaire est $\theta = \theta_{\max} \sin \left(\pm \sqrt{\frac{C}{J}} t + \theta_0 \right)$ où J est le moment d'inertie égal à 2 fois la masse

d'une boule multiplié par la distance ρ au fil. La période T est solution de l'équation $\omega = \frac{2 \pi}{T}$ où $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$ donc

$$\omega^2 = \frac{C}{J} = \frac{4 \pi^2}{T^2} \text{ donc } \frac{4 \pi^2}{T^2} J = C.$$

Résultat de CAVENDISH : $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Résultats actuels $G = 6,67234 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

(ref 1) : page <http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/gd4surl.html>

Masse	Volume
μ	1
M	$\frac{4}{3} \pi R^3$

Table 1

Degrés	Radians
360	$2 \cdot 3,14$
10	θ

Table 1

