§ Moments de force

$$a^{\llcorner x} = R\frac{d\omega}{dt}\cos\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],$$

$$a^{\llcorner y} = R\frac{d\omega}{dt}\sin\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],$$

$$a^{\llcorner z} = 0$$

Rappel 1

Point de départ de la théorie

Considérons l'accélération tangentielle d'un mouvement de rotation d'une parcelle ponctuelle de amtière (rappel 1).
Multipliée par la masse, elle donne la force qui en serait responsable :

$$F^{\llcorner x} = m\,R\frac{d\omega}{dt}\cos\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],\ F^{\llcorner y} = m\,R\frac{d\omega}{dt}\sin\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],\ F^{\llcorner z} = 0$$

(formules 1).

Équilibre entre deux forces

Si le corps subit en même temps plusieurs forces, il accélère comme si en subissait leur somme vectorielle. Mais certains équilibres montrent qu'une autre condition est nécessaire (figure 1).
Identifions les vecteurs force (table 1).

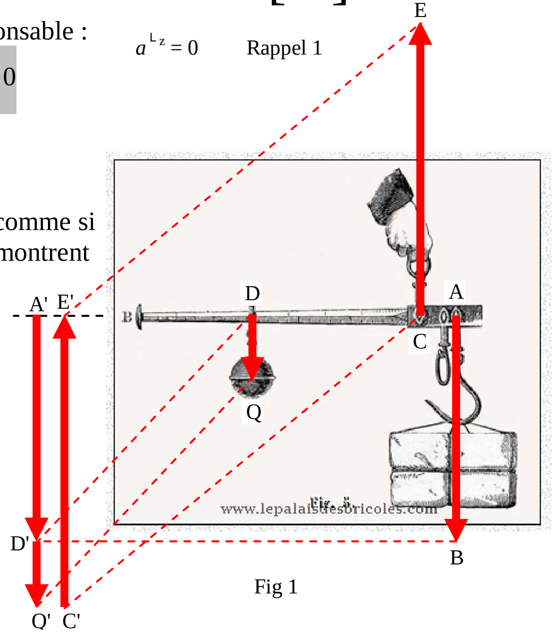


Fig 1

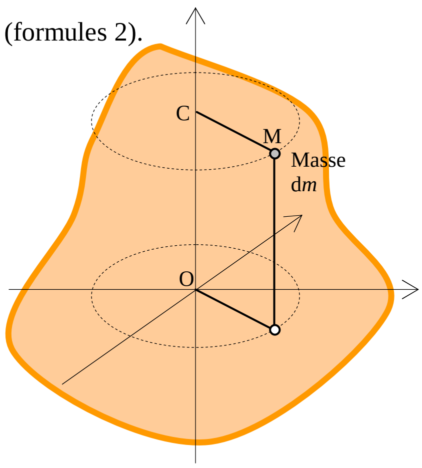
Flèche force	Vecteur force	Valeur	Distance
AB	$\mathbf{F}^{\text{charge}}$	F^{charge}	CA
A'D'			
DQ	$\mathbf{F}^{\text{contrepoids}}$	$F^{\text{contrepoids}}$	CD
D'Q'			
CE	$\mathbf{F}^{\text{main}}$	F^{main}	$CC = 0$
C'E'			

Table 1

Depuis NEWTON, l'expérience montre que la formule
$F^{\text{charge}} \cdot CA = F^{\text{contrepoids}} \cdot CD$
n'est pas fausse dans le cadre des incertitudes des mesures. On a alors pensé que la multiplication par R des deux membres des formules 1 avait un intérêt :

$$R\,F^{\llcorner x} = m\,R^2\frac{d\omega}{dt}\cos\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],\ R\,F^{\llcorner y} = m\,R^2\frac{d\omega}{dt}\sin\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right],\ R\,F^{\llcorner z} = 0$$ (formules 2).

Rotation d'un solide



Mentalement on découpe le solide en parties aussi petites qu'on veut au point de pouvoir considérer celles-ci comme ponctuelles. Nommons dm la masse d'une partie, d$F^{\llcorner}$ le bilan des forces qui la font tourner autour de l'axe vertical et additionnons membre à membre les équations

$$\sum_{\text{solide}} dm\,R^2\frac{d\omega}{dt} = \sum_{\text{solide}} R\,dF^{\llcorner}.$$

A droite la somme des R d$F^{\llcorner}$ est décomposable en forces d'origine extérieur au solide et forces d'origine intérieure. Des dernières ne sont que des forces de contact avec les parcelles mitoyennes et sont opposées deux à deux seln la loi de NEWTON. La formule précédente est synonyme de la suivante $\sum_{\text{solide}} dm\,R^2\frac{d\omega}{dt} = \sum_{\text{solide}} R\,dF^{\llcorner\,\text{extérieures}}$.

A gauche on remarque que toutes les parties parcourent le même angle en même temps donc $\frac{d\omega}{dt}$ est un multiplicateur commun donc $\left(\sum_{\text{solide}} dm\,R^2\right)\frac{d\omega}{dt} = \sum_{\text{solide}} R\,dF^{\llcorner\,\text{extérieures}}$. A droite, la somme peut être faite cause après cause donc on peut l'écrire $\sum_{\text{causes extérieures}} \sum_{\text{solide}}^{\text{pour une cause}} R\,dF^{\llcorner}$. Imaginons la taille des parties passer à la limite nulle : c'est la définition de l'intégration de RIEMANN : $\left(\int_{\text{solide}} R^2\,dm\right)\frac{d\omega}{dt} = \sum_{\text{causes extérieures}} \int_{\text{solide}} R\,dF^{\llcorner}$.

A gauche figure ce qu'on appelle le **moment d'inertie** J du solide. À droite les intégrales sont ce qu'on appelle les **moments** $\mathcal{M}$ de l'ensemble des forces accélératrices de la rotation d'origine extérieure au corps. La formule devient alors $\sum \mathcal{M}^{\text{extérieurs}} = J\frac{d\omega}{dt}$ (formule 3).