§ Moment de force et produit vectoriel

Sur la figure 1 la flèche rouge appartient au vecteur $\mathbf{F}^{\llcorner}$. Elle est perpendiculaire à la flèche position (C , M) dont la longueur est égale au rayon du mouvement et qui appartient à un vecteur qu'on va écrire **R**. La multiplication de $F^{\llcorner}$ par R représente l'aire du rectangle jaune $\mathrm{CMF}^{\llcorner}\mathrm{DC}$. Elle est égale à $m\,R^2\,\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$. On a donc l'équation $m\,R^2\,\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\,F^{\llcorner}$ (formule 1).

Ceci permet de généraliser aux cas où l'axe de rotation n'est plus parallèle à l'axe Oz et de même sens (rappel 1) : d'une part le rôle de $R\,F^{\llcorner}$ est joué par un vecteur écrit $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner}$ défini par la formule 2.

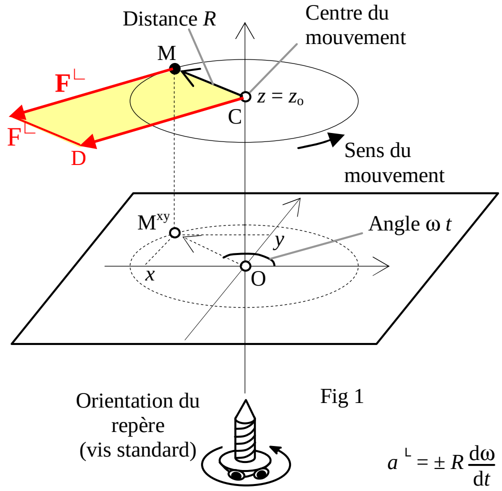

Fig 1

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & F^y \\ z & F^z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & F^z \\ x & F^x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & F^x \\ y & F^y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Formule 2

$$\text{aire ABCDA} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_{AB} & y_{AC} \\ z_{AB} & z_{AC} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_{AB} & z_{AC} \\ x_{AB} & x_{AC} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Rappel 1

$$a^{\llcorner} = \pm R\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

Rappel 2

Il en résulte que l'expression $m\,R^2\,\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ cache un vecteur de même nature que $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner}$. Le rappel 2 nous donne $\pm\, m\,R\,a^{\llcorner} = R\,F^{\llcorner}$.
Par identification, le moment de l'accélération est défini par $R\,a^{\llcorner}$ d'où la formule 3.

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{a}^{\llcorner} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & a^y \\ z & a^z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & a^z \\ x & a^x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & a^x \\ y & a^y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Formule 3

Temps	Angle	Arc	Note
T	$2\,\pi$	$2\,\pi\,R$	1 tour
1	ω	V	1 seconde
dt	dθ	dL	petit temps

Table 1

Le moment du bilan des forces subies par une parcelle d'un corps en rotation est $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner}$.
L'ensemble des forces subies par une parcelle M ponctuelle d'un corps en rotation suit un mouvement circulaire parce que le bilan des forces qu'il subit de la part des parcelles en contact avec M est une force **F** dont le vecteur est décomposé en un vecteur radial $\mathbf{F}^{\downarrow}$ centripète, donc colinéaire avec le vecteur position **R**, et un vecteur tangent $\mathbf{F}^{\llcorner}$ et alors $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{R} \wedge (\mathbf{F}^{\downarrow} + \mathbf{F}^{\llcorner}) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\downarrow} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner}$, mais l'angle entre **R** et $\mathbf{F}^{\downarrow}$ étant plat, $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\downarrow}$ est nul donc il reste $\mathbf{R} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{F}^{\llcorner}$ ■