§ Mouvement sinusoïdal

Suivons du regard un point marqué M sur un solide effectuant sur un axe perpendiculaire au plan de la figure 1. Sa trajectoire est colinéaire avec l'axe des cotes. Exprimons le mouvement par la trigonométrie d'un certain angle θ :

$x = 0$, $y = 0$ et $z - z_o = A \sin \theta$.

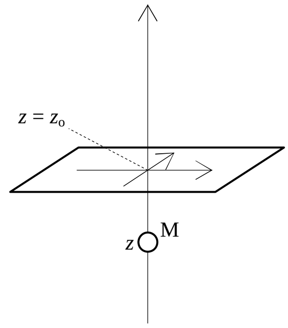


Fig 1

Une petite variation a comme coordonnées $dx = 0$, $dy = 0$ et $A \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta$.

Une division par le temps donne $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ et $\frac{dz}{dt} = A \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d\theta}{dt}$.

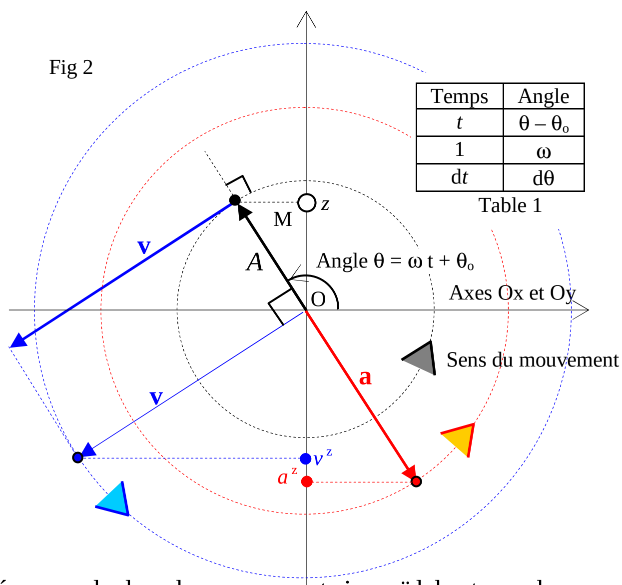
Ici, $\frac{dz}{dt}$ est la cote du vecteur **vitesse**, soit v^z et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse ω de variation de l'angle θ. Nous la supposerons constante. Nous retenons $v^z = A\,\omega \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

La variation de la vitesse est $dv^x = A \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d\theta}{dt} d\theta$. Une division par le temps donne

$\frac{dv^x}{dt} = 0$, $\frac{dv^y}{dt} = 0$ et $\frac{dv^z}{dt} = A \sin(\theta + \pi)\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ ce que nous écrirons avec les définitions précédentes

$\frac{dv^z}{dt} = A\,\omega^2 \sin(\theta + \pi)$. Ici, $\frac{dv^z}{dt}$ est la cote a^z du vecteur **accélération**.

La figure 2 montre une interprétation géométrique du mouvement sinusoïdal, inspirée de la théorie des vecteurs tournants de FRESNEL. La cote *z* est la projection le long d'un axe d'un mouvement circulaire uniforme. L'angle θ est appelé **phase**. L'angle entre deux vecteurs tournants est appelé **déphasage**. Ainsi le vecteur vitesse **v** (deux ses flèches flèches sont en bleu) devance le vecteur position (noir) d'un angle π/2 : on dit ces vecteurs en **quadrature de phase** et que la vitesse est en **avance de phase** sur le vecteur position. Le déphasage entre la position et le vecteur accélération **a** (en rouge) est π : on les dit en **opposition de phase**.



Temps	Angle
t	$\theta - \theta_o$
1	ω
dt	dθ

Table 1

Le tableau de proportion (table 1) montre que $\theta - \theta_o = \omega\, t$ donc les lois précédentes s'écrivent aussi

$x = 0$, $y = 0$ et $z = A \sin(\omega\, t + \theta_o) + z_o$,

$v^x = 0$, $v^y = 0$ et $v^z = A\,\omega \sin\left(\omega\, t + \theta_o + \frac{\pi}{2}\right)$,

$a^x = 0$, $a^y = 0$ et $a^z = A\,\omega^2 \sin(\omega\, t + \theta_o + \pi)$.

Note : compte tenu que $a^z + \omega^2 z = 0$, que a^z est la dérivée seconde de *x*, le mouvement sinusoïdal est une des solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$. En mathématiques, la solution générale de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} + a^2 u = 0$ est $u = A \sin(\pm\, a\, x + b)$ donc

la solution générale de l'équation différentielle $\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$ est $z = Z \sin(\pm\, \omega\, t + \theta_o)$.

Période, fréquence, vitesse angulaire, vitesse métrique (table 2)

Symboles habituels :

t = temps écoulé
θ = phase
N = nombre de périodes
T = période
ω = pulsation
A = amplitude du mouvement
f = fréquence

Temps	Angle	Périodes	
T	2 π	1	Définition de la période T
1	ω	f	Autres définitions
t	θ	N	Instant et position

Table 2

La table 2 décrit la proportionnalité entre ces deux grandeurs. Elle permet d'établir quelques trente formules mathématiques d'usage courant.

On a les expressions analogues avec le cosinus à la place du sinus. En effet, la dérivation de ces deux fonctions trigonométriques consiste à additionner $\frac{\pi}{2}$ à l'angle.