§ Mouvement sinusoïdal accéléré

Rappel 1

$\frac{dx}{dt} = v^x$, $\frac{dy}{dt} = v^y$, $\frac{dz}{dt} = v^z$

Imaginons le long d'un axe un mouvement sinusoïdal à pulsation variable $\omega(t)$:
$x = x_o$, $y = y_o$ et $z - z_o = A \sin \theta$.
Une petite variation de la position s'exprime ainsi.

$dx = 0$, $dy = 0$ et $dz = A \cdot d\sin\theta = A \sin(\theta + \pi/2)\, d\theta$ et $d\theta = \frac{d\theta}{dt} dt$, donc si on nomme ω la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$

$dz = A \cdot \omega \sin(\theta + \pi/2)\, dt$ donc une division par le temps (rappel 1) donne les coordonnées du vecteur vitesse
$v^x = 0$, $v^y = 0$ et $v^z = A \cdot \omega \sin(\theta + \pi/2)$.
Il n'y a pas de changement par rapport au mouvement sinusoïdal pur.

Une petite variation de la vitesse s'exprime ainsi.

$$dv^x = 0 \text{ , } dv^y = 0 \text{ et } dv^z = A \cdot d\left[\omega \sin(\theta + \pi/2)\right] = A \cdot d\omega \cdot \sin(\theta + \pi/2) + A \cdot \omega \cdot d\sin(\theta + \pi/2)$$

$$= A \cdot \frac{d\omega}{dt} dt \cdot \sin(\theta + \pi/2) + A \cdot \omega \cdot \sin(\theta + \pi) \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Une division par le temps donne (rappel 2)

$$a^x = 0 \text{ , } a^y = 0 \text{ et } a^z = A \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \sin(\theta + \pi/2) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\theta + \pi).$$

Rappel 2

$\frac{dv^x}{dt} = a^x$, $\frac{dv^y}{dt} = a^y$, $\frac{dv^z}{dt} = a^z$

On note que le mouvement obéit à l'équation différentielle

$$a^x = 0 \text{ , } a^y = 0 \text{ et } a^z = \frac{v^z}{\omega}\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 \cdot z.$$

On a les expressions analogues avec le cosinus à la place du sinus. En effet, la dérivation de ces deux fonctions trigonométriques consiste à additionner $\frac{\pi}{2}$ à l'angle.

Période, fréquence, vitesse angulaire, vitesse métrique (rappel)

Symboles habituels :
t = temps écoulé
θ = phase
N = nombre de périodes
T = période
ω = pulsation
A = amplitude du mouvement
f = fréquence

Temps	Angle	Périodes	
T	2π	1	Définition de la période T
1	ω	f	Autres définitions
t	θ	N	Instant et position

Table 2

La table 2 décrit la proportionnalité entre ces neuf grandeurs. Elle permet d'établir quelques trente formules mathématiques d'usage courant.