§ Oscillateurs harmoniques

Cas général
Imaginons l'espace repéré par trois axes quelconques Ox, Oy et Oz de même origine et le long de chacun d'eux un mouvement sinusoïdal indépendant :
$x - x_o = A^x \sin(\omega^x t + \theta_o^x)$, $y - y_o = A^y \sin(\omega^y t + \theta_o^y)$ et $z - z_o = A^z \sin(\omega^z t + \theta_o^z)$.

Expression matricielle
Comme tous les mouvements sinusoïdaux, ils obéissent aux équations différentielles respectives
$a^x = -\omega^{x\,2}(x - x_o)$, $a^y = -\omega^{y\,2}(y - y_o)$ et $a^z = -\omega^{z\,2}(z - z_o)$. Nommons Ω la matrice $\begin{pmatrix} \omega^x & 0 & 0 \\ 0 & \omega^y & 0 \\ 0 & 0 & \omega^z \end{pmatrix}$. Alors Ω^2 est la matrice $\begin{pmatrix} \omega^{x\,2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{y\,2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{z\,2} \end{pmatrix}$. Le vecteur accélération **a** a comme coordonnées les $\begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix}$ et la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ entre le vecteur position et le vecteur position initiale les coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{pmatrix}$.Alors en calcul matriciel

$$\begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega^{x\,2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{y\,2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{z\,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{pmatrix}$$

, ce qui s'écrit symboliquement $\mathbf{a} = -\Omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$.

Synchronisme
Les trois oscillateurs sont synchrones si les trois pulsations sont égales : si ω est la valeur commune, alors le point mobile obéit à l'équation vectorielle $\mathbf{a} = -\omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$.

Temps	Angle
$T^{x,\ y\ ou\ z}$	2π
1	$\omega^{x,\ y\ ou\ z}$

Table 1

Si les trois pulsations sont proportionnelles à trois nombres entiers, c'est-à-dire si sont chacune un multiple entier d'une pulsation commune ω, le point mobile décrit une courbe fermée. En effet (table 1) les trois périodes $T^x = \frac{2\pi}{\omega^x}$, $T^y = \frac{2\pi}{\omega^y}$ et $T^z = \frac{2\pi}{\omega^z}$ sont des quotients $T^x = \frac{2\pi}{n^x\,\omega}$, $T^y = \frac{2\pi}{n^y\,\omega}$ et $T^z = \frac{2\pi}{n^z\,\omega}$ donc $n^x T^x = n^y T^y = n^z T^z = \frac{2\pi}{\omega}$ ce qui signifie qu'au bout d'un temps T égal à $n^{x,\ y\ ou\ z} \cdot T^{x,\ y\ ou\ z}$ le point matérialisé se retrouve au même endroit dans l'espace.

Cas particulier de synchronisme : c'est le mouvement circulaire uniforme sur un des plans Oxy, Oyz ou Ozx.

Asynchronisme
Si les trois pulsations ne sont pas proportionnelles à trois nombres entiers, les chances avec lesquelles le point mobile se retrouve sur le même point de l'espace sont nulles. D'autre part, le domaine de l'espace parcouru par le point matérialisé est limité et inclus dans un parallélépipède parallèle aux axes, donc le point mobile décrit une courbe toujours ouverte et ressemble à une pelote de fil plus ou moins enchevêtrée.