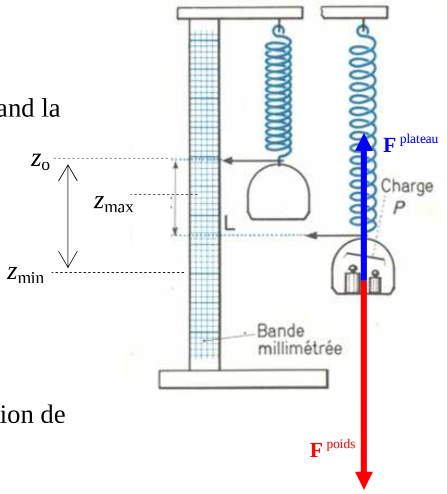
§ Oscillations mécaniques



Position du problème

Les expériences d'étalonnage des ressorts hélicoïdaux montrent que quand la charge est lâchée, se produit une oscillation en apprence sinusoïdale. étudions l'ensemble E des masses marquées posées sur le plateau.
Nommons z_o la position de l'index quand le plateau est vide.
Nommons z_{max} sa position la plus basse et z_{max} la plus haute.
Nommons z_o la position de l'index quand le plateau est vide.
Nommons z_{max} sa position la plus basse et z_{max} la plus haute quand le plateau est chargé et l'ensemble E oscille.

Analyse mécanique

L'inventaire des forces néglige le contact avec l'air. Il reste dans l'équation de NEWTON $\mathbf{F}^{\text{poids}} + \mathbf{F}^{\text{ressort}} = m\,\mathbf{a}$.

Résolution

En ordonnées cela donne, si l'axe des cotes est orienté vers le bas, $m\,g - k\,(z - z_o) = m\,a^{z}$ donc $m\,a^{z} + k\,(z - z_o) = m\,g$ (équation 1). Nommons z_P une solution particulière : $m\,a^{z}_{P} + k\,(z_P - z_o) = m\,g$. La différence entre les deux solutions z et z_P obéit à la différence membre à membre des deux équations précédentes $m\,(a^{z} - a^{z}_{P}) + k\,(z - z_P) = 0$. (formule 1)
Comme solution particulière, choisissons-en une d'accélération nulle, ce qui est le cas du ressort au repos, plateau immobile : $k\,(z_P - z_o) = m\,g$. On en déduit $k\,z_P - k\,z_o = m\,g$, $k\,z_P = m\,g + k\,z_o$, $z_P = \dfrac{m\,g + k\,z_o}{k}$. On a donc d'après la formule 1 : $m\,a^{z} + k\,(z - z_P) = 0$ donc $= a^{z} + \dfrac{k}{m}(z - z_P) = 0$.

Renommons Z la différence $z - z_P$. La dérivation donne $\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dz}{dt}$ puis $\dfrac{d^2Z}{dt^2} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = a^{z}$ et l'équation s'écrit $\dfrac{d^2Z}{dt^2} + \dfrac{k}{m} Z = 0$. Notre modèle mathématique est l'équation $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega^2\,u = 0$ dont les solutions sont des fonctions sinus : $u = U \sin(\pm\,\omega\,t + \theta_o)$. Le rôle de u est joué par Z donc par $z - z_P$. Celui de ω^2 est joué par $\dfrac{k}{m}$ donc celui de ω est joué par $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Le rôle de U est joué par la plus grande valeur de Z donc de la différence $z - z_P$ donc quand z est maximum, donc on retiendra la substitution de U par $z_{max} - z_P$. Résumons :
$z - z_P = (z_{max} - z_P) \sin\left(\pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \theta_o\right)$. Substituons z_P :

La loi de position du système E est $z - \dfrac{m\,g + k\,z_o}{k} = \left(z_{max} - \dfrac{m\,g + k\,z_o}{k}\right) \sin\left(\pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \theta_o\right)$.

La pulsation du mouvement est $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.