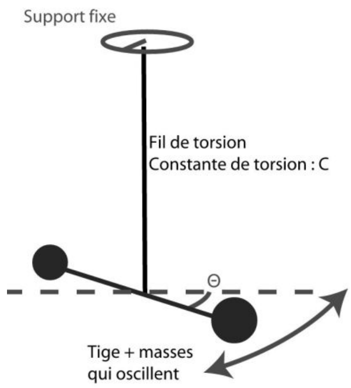
§ Pendule de torsion



Position du problème

À l'équilibre, la barre est immobile dans la direction indiquée en tirets. Une rotation induit un moment de rappel égal à $-C\,\theta$ où θ est l'angle de rotation. Le signe moins vient du fait que la torsion de la tige accélère la rotation dans le sens opposé à θ. L'équation mécanique est donc $-C\,\theta = J\,\frac{d\omega}{dt}$. Mais ω lui-même est la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ donc on retrouve $J\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\,\theta = 0$ donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J}\,\theta = 0$.

Sa résolution

Le modèle est $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2\,u = 0$. Les solutions sont $u = U \sin(\pm\,\omega\,t + \theta_o)$. Le rôle de u est joué par θ, celui de U est joué par l'angle maximal θ_{max}, celui de ω^2 par $\frac{C}{J}$ donc celui de ω est joué par $\sqrt{\frac{C}{J}}$ donc les solutions sont donc $\theta = \theta_{max} \sin\left(\pm\sqrt{\frac{C}{J}}\,t + \theta_o\right)$.

Les travaux de HOOKE

C'était un expérimentateur de l'époque de NEWTON. Il avait constaté que

- si on multiplie par 3 la longueur L du fil tordu, C est divisé par 3,
- si on double le diamètre D du fil, C est multiplié par 16,

en conséquencen la formule $C = \frac{k\,D^4}{L}$ a été adoptée. Le coefficient k dépend de la matière avec laquelle le fil a été fabriqué. On a donc $\frac{C}{J} = \frac{k\,D^4}{J\,L}$ donc $\sqrt{\frac{C}{J}} = \sqrt{\frac{k\,D^4}{J\,L}}$.

Les boules se comportent comme leur centre ayant comme masse la masse de la boule, donc $J = 2\left(\frac{1}{2}\,m_{boule}\,R^2\right)$ donc $J = m_{boule}\,R^2$ donc $\sqrt{\frac{C}{J}} = \sqrt{\frac{k\,D^4}{m_{boule}\,R^2\,L}}$.

Temps	Angle	Périodes	
T	$2\,\pi$	1	Définition de la période T
1	ω	f	Autres définitions
t	θ	N	Instant et position

Rappel 1

Usage par CAVENDISH

Pour tester les fils de torsion, on mesure la période des oscillations (rappel 1) : $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$ donne l'équation d'inconnue k : $\sqrt{\frac{k\,D^4}{m_{boule}\,R^2\,L}} = \frac{2\,\pi}{T}$. Résolution : $\frac{k\,D^4}{m_{boule}\,R^2\,L} = \frac{4\,\pi^2}{T^2}$ donne $k = \frac{4\,\pi^2\,m_{boule}\,R^2\,L}{T^2\,D^4}$.