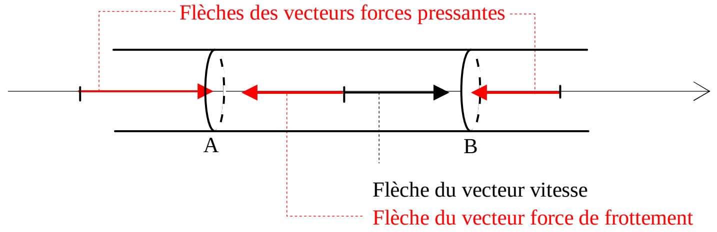
§ Percolations

Position du problème

Dans un tuyau plein de sable on force un fluide à circuler. Soit un segment de ce fluide limité en amont par une face A et en aval par une face B, les deux faces ayant la même aire S. Nommons P_A la pression (table 1) en A et P_B la pression en B. Nommons L la longueur du segment et Q la quantité de fluide qu'il contient. Nommons Q' le débit (table 2) que nous supposerons constant. Nommons V la vitesse de déplacement du fluide (table 3) que nous supposerons constante.

Force pressante	Aire de la surface pressée
F	S
P	1

Table 1 : définition de la pression



Temps	Quantité de fluide qui passe
t	Q
1	Q'

Table 2 : définition du débit

temps	Distance parcourue
t	L
1	V

Table 3 : définition de la vitesse

L'inventaire des forces donne :
le poids du fluide $\mathbf{F}^{\text{poids}}$,
le contact entre le fluide, le tuyau et le sable $\mathbf{F}^{\text{contacts}}$,
la pression en amont $\mathbf{F}^{\text{pressante}}{}_{\text{A}}$ et en aval $\mathbf{F}^{\text{pressante}}{}_{\text{B}}$.
La force $\mathbf{F}^{\text{contacts}}$ est décomposable verticalement en une force de soutien (le fluide ne tombe pas) $\mathbf{F}^{\text{contacts}\downarrow}$ et horizontalement, ce qui correspond au frottement entre le fluide et le sable $\mathbf{F}^{\text{frottements}}$ (table 4).
Puisque le fluide n'accélère pas, le bilan des forces qu'il subit est nul :
$\mathbf{F}^{\text{pressante}}{}_{\text{A}} + \mathbf{F}^{\text{pressante}}{}_{\text{B}} + \mathbf{F}^{\text{frottements}} + \mathbf{F}^{\text{poids}} + \mathbf{F}^{\text{contacts}\downarrow} = 0$.
En abscisses le long d'un axe superposé avec celui du tuyau on trouve
$F^{\text{pressante}}{}_{\text{A}} - F^{\text{pressante}}{}_{\text{B}} - F^{\text{frottements}} = 0$.

Quantité de fluide	Sa vitesse	Force de frottement
1	1	ρ_{frot}
1	V	$\rho_{\text{frot}}\, V$
Q	V	$\rho_{\text{frot}}\, V\, Q$

Table 4 : intuition sur le frottement

Compte tenu des définitions des grandeurs, $P_A\, S - P_B\, S - \rho_{\text{frot}}\, V\, Q = 0$.
Si on choisit comme temps t celui nécessaire pour que le fluide parcoure la distance L, on obtient

$$P_A\, S - P_B\, S - \rho_{\text{frot}} \frac{L}{t} Q = 0.$$

temps	Quantité d'électricité
t	Q
1	I

Table 5 : loi de Coulomb

Mais ce temps est aussi celui pendant lequel toute la quantité de fluide Q traverse la face B :
$P_A\, S - P_B\, S - \rho_{\text{frot}}\, L \dfrac{Q}{t} = 0$ donne $P_A\, S - P_B\, S - \rho_{\text{frot}}\, L\, Q' = 0$. Une algèbre donne $P_A - P_B = \rho_{\text{frot}} \dfrac{L}{S} Q'$.

Analogie électrique, la loi d'Ohm : Ohm pensait que la tension électrique était la différence de pression du fluide électrique en amont et en aval (les chimistes parlent encore de "tension de vapeur" pour désigner la pression de la vapeur au-dessus des liquides) U_A et U_B. Quant au débit, il est assimilé à l'intensité électrique conformément à la loi de Coulomb (table 5) : le rôle de Q' est joué par I, donc $U_A - U_B = \rho_{\text{résist}} \dfrac{L}{S} I$. Ici, $\rho_{\text{résist}}$ est la **résistivité électrique** du conducteur.

Analogie thermique : c'est la différence de température qui joue le rôle de $P_A - P_B$: $T_A - T_B = \rho_{\text{th}} \dfrac{L}{S} Q'$. Ici, ρ_{th} est la **résistivité thermique** du matériau (Fourier, 1822).

Diffusion d'un soluté, loi de Fick : c'est la différence de concentration (table 6) qui joue le rôle de $P_A - P_B$, donc $c_A - c_B = \rho_{\text{diff}} \dfrac{L}{S} Q'$. Ici, ρ_{diff} est le **coefficient de diffusion** du soluté.

Moles	Volume
n	V
c	1

Table 6 : définition de la concentration